

Praktikum Kernphysik

Sommersemester 2011

Justus Liebig Universität Gießen

Versuch 1: Einführung in die Messtechnik und Statistik

Stefan Diehl, Diego Semmler, Nils Stöckmann

18. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Einführung | 1 |
| 2 | Grundlagen der Statistik | 3 |
| 2.1 | Arten von Messfehlern | 3 |
| 2.2 | Grundbegriffe der Statistik | 4 |
| 2.3 | Wahrscheinlichkeitsverteilungen | 7 |
| 2.3.1 | Binomialverteilung | 7 |
| 2.3.2 | Näherungsformeln für die Binomialverteilung | 8 |
| 2.3.3 | Intervallverteilung | 10 |
| 2.3.4 | Intervallverteilung mit Totzeit | 11 |
| 2.4 | Pearsons χ^2 -Test | 13 |
| 3 | Entstehung und Energie von Gammastrahlung | 15 |
| 4 | Aufbau und Physik des Geiger-Müller-Zählrohres | 17 |
| 4.1 | Motivation | 17 |
| 4.2 | Physikalische Grundlagen | 18 |
| 4.2.1 | Ionisations- und Rekombinationsmechanismen | 18 |
| 4.2.2 | Transport von Elektronen und Ionen in Gasen | 20 |
| 4.2.3 | Die Lawinenbildung | 21 |
| 4.3 | Aufbau und Funktion eines Zählrohres | 22 |
| 4.4 | Arbeitsbereiche des Zählrohres | 23 |
| 4.4.1 | Wahl des Füllgases | 26 |
| 4.4.2 | Signalbildung und Signalform eines Zählrohres | 26 |
| 4.4.3 | Tot- und Erholzeit des Geigerzählers | 29 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 5 | Versuchsdurchführung | 31 |
| 5.1 | Blockschaltbild der Datenaufnahmeelektronik | 31 |
| 5.2 | Darstellung der beobachteten Signale | 32 |
| 5.3 | Abschätzung von Tot- und Erholzeit | 34 |
| 5.4 | Darstellung der Plateaukurve | 35 |
| 5.5 | Zählraten bei verschiedenen Messzeiten | 38 |
| 5.6 | Messzeit zum Erreichen einer konstanten Impulszahl | 40 |
| 5.7 | Impulszahlen bei konstanter Messzeit - χ^2 -Test | 43 |
| 6 | Zusammenfassung und Diskussion | 47 |

Abstract

In diesem Versuch soll zum Einen die Funktionsweise eines Geiger - Müller - Zählrohres vertieft und die dazugehörige Elektronik und Signalverarbeitung genauer betrachtet werden. Zum Anderen soll die Bedeutung statistischer Verfahren in der Messtechnik kernphysikalischer Experimente verdeutlicht werden, indem die mittels des Geiger - Müller Zählers aufgenommenen Zählraten mit statistischen Methoden analysiert und mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen verglichen werden. In einem ersten Schritt werden die Tot- und Erholzeit des Zählrohres durch die Analyse der Signalform mittels eines Speicheroszilloskops bestimmt. Weiterhin wird die Plateaukurve des Zählrohres aufgenommen und hieraus die Arbeitsspannung und die Steigung des Plateaus bestimmt. Im nächsten Schritt wird der zu erwartende Fehler der Zählrate einer normalverteilten Messgröße bei Messungen mit verschiedenen Messzeiten und bei einer Messreihe mit konstanter Impulszahl mit statistischen Methoden bestimmt und diskutiert. Abschließend wird eine poissonverteilte Messgröße mit den mittels der Poissonfunktion theoretisch berechneten Messwerten durch einen χ^2 -Test verglichen.

Kapitel 1

Einführung

Die statistische Analyse der Messergebnisse ist in jeder Wissenschaft ein essentieller Bestandteil der Auswertung eines Versuchs, da es nur so möglich ist eine Aussage über die Qualität des erzielten Ergebnisses zu treffen und dieses mit bereits vorhandenen Werten zu vergleichen und einzuordnen. Daher ist es wichtig mit den Grundlegenden statistischen Begriffen und Methoden vertraut zu sein. Im ersten Theorieteil soll es daher darum gehen zunächst einige Grundbegriffe der Statistik einzuführen und auf dieser Grundlage Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu betrachten. Zum Abschluss des Kapitel wird noch ein Möglichkeit vorgestellt, die Übereinstimmung der experimentellen Werte mit einer theoretischen Berechnung zu vergleichen.

Um die statistischen Analysen durchzuführen werden in diesem Versuch Messungen mit einem Geiger-Müller-Zählrohr durchgeführt. Dieser Detektor kann dazu verwendet werden um einen Einblick in den bereich der Gasdetektoren zu erhalten, da er viele der grundlegenden Funktionsprinzipien dieser Detektorklasse aufweist. Im zweiten Theorieteil sollen daher zunächst die physikalischen Grundlagen von Gasdetektoren besprochen werden, um anschließend auf die Physik des Geiger-Müller-Zählers und dessen Arbeitsbereiche einzugehen.

Nach den beiden theoretischen Abhandlungen folgt das eigentliche Experiment. Hier werden zunächst die Messelektronik und die erhaltenen Signalformen genauer betrachtet um dann die Plateaukurve als Grundlegende Charakteristik des Geiger-Müller-Zählrohres aufzunehmen und hieraus die Arbeitsspannung für die weiteren Versuchsteile zu bestimmen. In den folgenden Versuchsteilen soll dann zunächst der Einfluss der Messzeit und einer Wiederholung der Messung auf den zu erwartenden Fehler diskutiert werden, bevor am Ende ein Vergleich einer experimentellen Verteilung mit einer theoretisch berechneten Verteilung durchgeführt wird.

Kapitel 2

Grundlagen der Statistik

In diesem Kapitel sollen zunächst einige grundlegende Begriffe der Statistik definiert werden. Weiterhin werden die für die Analyse der experimentellen Daten des Versuchs wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt und diskutiert.

2.1 Arten von Messfehlern

In der Praxis sind gemessene physikalische Größen nie exakt, sondern immer mit einem Messfehler behaftet. Die Ermittlung des möglichen Fehlers ist daher wesentlichen Bestandteil einer jeden Versuchsauswertung. Der Fehler versetzt den Experimentator erst in die Lage, etwas über die Güte des unter den gegebenen Umständen gewonnenen Versuchsergebnissen auszusagen. Hierbei muss man zwischen statistischen und systematischen Fehlern unterscheiden.

Systematische Fehler können z.B. durch die falsche Eichung eines Messgerätes, durch unzureichende Wärmeisolation oder die Verwendung von Näherungsformeln außerhalb ihres Gültigkeitsbereichs auftreten und müssen jeweils im Einzelfall abgeschätzt werden. Systematische Fehler sind prinzipiell (unter teils großem Aufwand) vermeidbar und beeinflussen das Messergebnis bei gleicher experimenteller Anordnung stets in die gleichen Richtung.

Statistische Fehler beeinflussen das Ergebnis hingegen in beide Richtungen. Ihre Ursache liegt einerseits im Experimentator selbst (Einstell- und Ablesefehler, endliche Ablesegenauigkeit von Instrumenten,...) andererseits aber auch in veränderlichen äußeren Einflüssen (Rauschen in der Elektronik, Temperatur- und Netzspannungsschwankungen,...). Aufgrund ihrer statistischen Natur sind sie mit statistischen Methoden gut zu behandeln. Statistische Fehler sind prinzipiell unvermeidbar, können jedoch durch wiederholte Messungen und geeignete Auswertungsmethoden verringert werden. Eines der Hauptaugenmerke dieses Versuchs soll auf der Einführung und Anwendung statistischer Auswertemethoden zur Beschreibung und Minimierung des statistischen Fehlers liegen.

2.2 Grundbegriffe der Statistik

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige grundlegende Begriffe der Statistik eingeführt werden.

Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit: Wiederholt man einen Zufallsversuch mehrfach unter gleichen Bedingungen, so können sich verschiedene Ergebnisse ergeben. Als Versuch ist hierbei in der Wahrscheinlichkeitstheorie allgemein die Realisierung exakt festgelegter Experimentierbedingungen und Vorgehensweisen definiert, welche beliebig oft reproduzierbar sein müssen. Das Ergebnis eines solchen Versuchs bezeichnet man als Ereignis und die Menge aller möglichen Ereignisse als Ereignismenge. Ergibt sich bei der Wiederholung eines festgelegten Versuches das Ereignis r in H_r von insgesamt N Versuchen, so definiert man die relative Häufigkeit h_r des Ereignisses r als:

$$h_r = \frac{H_r}{N} \quad (2.1)$$

Die relative Häufigkeit kann für endliche Versuchsreihen in einem gewissen Rahmen schwanken. Lässt man die Anzahl der Versuchsdurchführungen gegen unendlich gehen, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit P_r des Ereignisses r als:

$$P_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_r}{N} \quad (2.2)$$

Arithmetischer Mittelwert und Erwartungswert: In Zufallsexperimenten interessiert weniger das Ergebnis einer einzelnen Messung, sondern mehr der Wert, der im Durchschnitt, also im Mittel herauskommt. Hierzu betrachten wir den Fall, dass eine Zufallsvariable M_r bei der Durchführung eines Versuchs n verschiedene Werte ($r = 1, 2, \dots, n$) annehmen kann. Tritt nun bei einer Messreihe mit N Messungen jedes Ergebnis M_r mit der Häufigkeit H_r ein, so ergibt sich der arithmetische Mittelwert der Größe M gemäß

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=1}^n H_r M_r = \sum_{r=1}^n h_r M_r \quad (2.3)$$

Ist die Zahl N der Messungen klein, so kann das Ergebnis für \bar{M} in verschiedenen Messreihen innerhalb eines gewissen Rahmens variieren. Betrachtet man nun eine unendlich lange Messreihe, so wird aus der relativen Häufigkeit h_r eine Wahrscheinlichkeit P_r und wir erhalten die wohl definierte Größe des Erwartungswertes E gemäß

$$E = \langle M \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{M} = \sum_{r=1}^n P_r M_r \quad (2.4)$$

Der Erwartungswert entspricht gemäß seiner Definition, dem Mittelwert einer unendlich langen Messreihe.

Varianz und Standardabweichung: Die Varianz ist ein Maß für die Streuung der Einzelwerte um den Erwartungswert. Sie ist definiert durch

$$V(M) = \sum_{r=1}^n P_r \cdot (M_r - \langle M \rangle)^2 \quad (2.5)$$

Um für diese Streugröße die selbe Einheit wie für die Messgröße zu erhalten, definiert man die Standardabweichung als die Wurzel aus der Varianz.

$$\sigma(M) = \sqrt{V(M)} \quad (2.6)$$

Diese Größe eignet sich nun sehr gut um Angaben über die Streuung der Einzelwerte um den Erwartungswert zu machen.

Mittelwert einer endlichen Messreihe: In der Regel ist der Erwartungswert einer Messreihe die gesuchte Messgröße. Da wir aber keine unendlich langen Messreihen durchführen können, brechen wir die Messung irgendwann ab und nehmen den Mittelwert der endlichen Messreihe als Näherung für deren Erwartungswert. Für eine Stichprobe vom Umfang N ergibt sich der Mittelwert und somit auch die Näherung für den Erwartungswert der N Messwerte (M_1, M_2, \dots, M_N) als

$$\langle M \rangle \approx \bar{M} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{r=1}^N M_r \quad (2.7)$$

Der Preis dieser Methode ist, dass wir uns einen statistischen Fehler einhandeln, der in den folgenden Abschnitten genauer untersucht werden soll.

Varianz und Standardabweichung einer endlichen Messreihe: Analog zum Erwartungswert gibt es auch für die Varianz und Standardabweichung einer endlichen Messreihe mit dem Umfang N einen genäherten Ausdruck. Hierzu definiert man zunächst die mittlere quadratische Abweichung einer Stichprobe als:

$$s^2(M) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (M_r - \bar{M})^2 \quad (2.8)$$

Die quantitative Herleitung, welche der einschlägigen Fachliteratur zur numerischen Statistik entnommen werden kann zeigt, dass zwischen dem Erwartungswert der mittleren quadratischen Abweichung s^2 und der Varianz $V(x)$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$\langle s^2(M) \rangle = \frac{N-1}{N} V(M) \quad (2.9)$$

Es zeigt sich, dass die mittlere quadratische Abweichung im Mittel etwas kleiner als die Varianz ist. Dies war zu erwarten, da die Abweichungen der Einzelwerte einer Stichprobe vom Mittelwert, welcher aus diesen Werten errechnet wurde, stets kleiner sind als die Abweichungen vom Erwartungswert.

Mit dieser Beziehung kann nun Näherungsweise die Varianz der Messwerte aus der Stichprobe errechnet werden. Hierzu stellt man Gleichung 2.9 nach $V(x)$ um und setzt die Näherung $\langle s^2 \rangle \approx s^2$ ein. Es ergibt sich:

$$V(M) = \sigma^2(M) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (M_r - \bar{M})^2 \quad (2.10)$$

Die Standardabweichung der Einzelmessung ergibt sich damit zu:

$$\sigma(M) \approx \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (M_r - \bar{M})^2} \quad (2.11)$$

Der Wert $N-1$ im Nenner stellt hierbei ein Maß für die Anzahl der unbenutzten Freiheitsgrade dar. Da bereits einen Freiheitsgrad für die Berechnung von \bar{M} "verbraucht" haben, bleiben noch $N-1$ übrig.

Standardabweichung des Mittelwertes: In Abschnitt 2.2 wurde die Näherung $\langle M \rangle \approx \bar{M}$ als Näherung für den Erwartungswert angesetzt. Es stellt sich jedoch die Frage, wie zuverlässig der errechnete Mittelwert ist. Es ist also ein Maß von Nöten, welches angibt, wie stark der Mittelwert schwankt, wenn man die selbe Messreihe mit gleichem Umfang und unter gleichen Bedingungen mehrmals wiederholt und jeweils den Mittelwert berechnet. Für die Beziehung der Varianz des Mittelwertes und der Varianz der Einzelmessung ergibt sich hierbei die folgende Beziehung:

$$V(\bar{M}) = \frac{1}{N} V(M) \quad (2.12)$$

Durch einsetzen von Gleichung 2.11 ergibt sich somit der folgende Näherungsweise Ausdruck für die Standardabweichung des Mittelwertes:

$$\sigma(\bar{M}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma(M) \approx \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{r=1}^N (M_r - \bar{M})^2} \quad (2.13)$$

Man erkennt, dass die Standardabweichung des Mittelwertes mit $1/\sqrt{N}$ abnimmt und somit für lange Messreihen beliebig klein wird, da der Mittelwert in diesem Fall gegen den Erwartungswert konvergiert. Daher ist es für reale Experimente notwendig ausreichend lange Messreihen durchzuführen.

Mit den in diesem Abschnitt diskutierten Größen kann nun das Ergebnis der Messreihe als $\bar{M} \pm \sigma(\bar{M})$ angegeben werden.

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

2.3.1 Binomialverteilung

Ein Experiment mit zwei möglichen Ausgängen bezeichnet man als Bernoulli - Experiment. Ein Beispiel für eine solches Experiment in der Kernphysik ist der radioaktive Zerfall. Ein einzelner instabiler Kern hat hierbei in einem definierten Zeitintervall die Wahrscheinlichkeit p_1 , dass er zerfällt. da die Gesamtwahrscheinlichkeit stets auf $p_1 + p_2 = 1$ normiert ist, ergibt sich die Gegenwahrscheinlichkeit p_2 für dieses Ereignis, also die Wahrscheinlichkeit dass der Kern im definierten Zeitintervall nicht zerfällt zu $p_2 = 1 - p_1$. In der Kernphysik betrachtet man jedoch in der Realität nicht nur einen einzelnen radioaktiven Kern, sondern ein System aus mehr oder weniger vielen Kernen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem System mit n Kernen, ein gewisser Anteil der Kerne im definierten Zeitintervall zerfällt, kann mit einer Binomialverteilung beschrieben werden.

Um die Formel für die Binomialverteilung herzuleiten, betrachtet man ein System aus n Objekten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem einzelnen von diesen n Objekten ein bestimmtes Ereignis eintritt, sei p und die Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei k von den n Teilchen ein positiver Ausgang eintritt, ergibt sich somit unter der Annahme, dass die Ereignisse unabhängig voneinander sind durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten zu

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{(n-k) \text{ Faktoren}} = p^k \cdot q^{n-k}$$

Um die Gesamtwahrscheinlichkeit zu erhalten müssen nun noch die verschiedenen Möglichkeiten berücksichtigt werden, welche es gibt um k Teilchen aus der Gesamtzahl n auszuwählen, da es z.B. für die gemessene Zählrate eines radioaktiven Zerfalls unwichtig ist, welche der Kerne zerfallen sind. Interessant ist nur deren Anzahl. Der gesuchte Wichtungsfaktor ergibt sich aus der Anzahl der Möglichkeiten, k Teilchen aus n auszuwählen. Diese wird in der Kombinatorik durch den Binomialkoeffizienten beschrieben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Somit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung zu:

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (2.14)$$

Mittels dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung können nun auch der Erwartungswert und die Standardabweichung der Binomialverteilung errechnet werden. Diese ergeben sich als Ergebnis einer elementaren Rechnung unter Ausnutzung der Partialsummen, welche hier nicht explizit durchgeführt werden soll, zu:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n P(k)k = np \quad (2.15)$$

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$\sigma(k) = \sqrt{V(k)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (2.16)$$

Abbildung 2.1 zeigt die Abhängigkeit einer Binomialverteilung mit $n = 10$ von der „Erfolgswahrscheinlichkeit“ p .

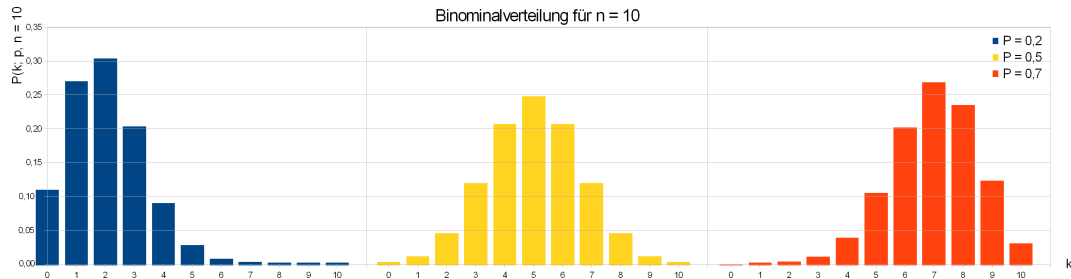


Abbildung 2.1: Beispiele von Binomialverteilungen mit $n = 10$ und $P = 0,2; 0,5$ und $0,7$

Es wird deutlich, dass die Binomialverteilung für $p = 0,5$ eine symmetrische Form aufweist, worauf die im nächsten Abschnitt erläuterte Normalverteilung basieren wird. Für kleine p verschiebt die Verteilung, wie die Formel für den Erwartungswert schon erwarten lässt, ihren Schwerpunkt nach links, während der Schwerpunkt für große p nach rechts wandert. In beiden Fällen ergibt sich hierdurch eine asymmetrische Form.

2.3.2 Näherungsformeln für die Binomialverteilung

Für praktische Anwendungen ist die Binomialverteilung in vielen Fällen ungeeignet, da die Fakultäten schon für relativ kleine Werte von n recht groß werden und für die die in einem typischen radioaktiven Präparat enthaltenen $\approx 10^{23}$ Atome praktisch nicht berechenbar sind. Daher verwendet man für für solche Anwendungen die folgenden beiden Näherungsformeln.

Die Normalverteilung

Sind bei einer binomialverteilten Zufallsgröße sowohl np als auch nq groß, so kann als Näherung die Normalverteilung herangezogen werden.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(x)} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2(x)}} \quad (2.17)$$

Während das k der Binomialverteilung nur für ganzzahlige Werte definiert war, beschreibt das in der Normalverteilung auftauchende x eine kontinuierliche Messgröße. Der Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Standardabweichung σ berechnen sich hierbei analog zur Binomialverteilung, gemäß:

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^n P(k)k = np \quad (2.18)$$

$$\sigma(k) = \sqrt{V(k)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (2.19)$$

In Übereinstimmung zu den anhand der Binomialverteilung diskutierten Symmetrien ergibt sich eine zum Erwartungswert $\langle x \rangle$ symmetrische Verteilung, deren halbe Breite auf $e^{-1/2}$ -facher Höhe durch die Standardabweichung σ gegeben ist. Abbildung 2.2 zeigt eine Normalverteilung mit $\bar{x} = 0$ und $\sigma = 1$. In der Abbildung sind auch der Erwartungswert und die Standardabweichung dargestellt.

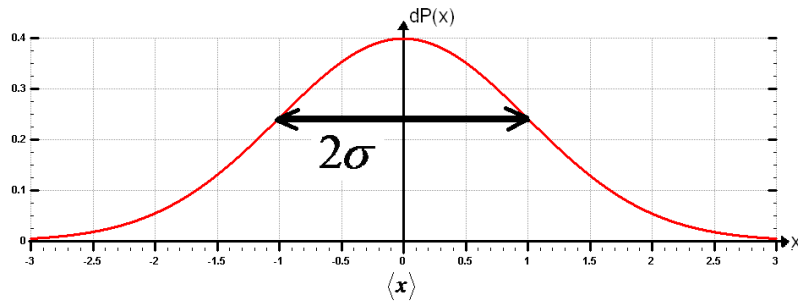


Abbildung 2.2: Beispiel einer Normalverteilung mit $\bar{x} = 0$ und $\sigma = 1$. Der Erwartungswert und die Standardabweichung sind explizit eingezeichnet.

Die Fläche in einem bestimmten Bereich unter der Kurve gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Messwert in diesem Bereich liegt und kann durch Integration der in Gleichung 2.17 gegebenen stetig differenzierbaren Verteilung im gewünschten Intervall ermittelt werden. Entsprechend muss die Gesamtfläche unter der Kurve für Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen auf 1 normiert sein, was durch den Vorfaktor der Exponentialfunktion in 2.17 realisiert wird. Die Fläche im Bereich $x = \bar{x} \pm \sigma$ gibt die relative Wahrscheinlichkeit an, dass ein Wert in diesem Bereich liegt. Im einfachen σ -Intervall liegen bei einer Normalverteilung stets 68,3 % der Werte (Fläche = 0,683). In einem 2σ -Bereich liegen hingegen schon 95,4 % und im 3σ -Bereich 99,73 % der Messwerte.

Der Bereich in dem 50 % der Messwerte liegen heißt *wahrscheinlicher Fehler* und ist durch ein $r = 0,6745 \cdot \sigma$ -Intervall um den Erwartungswert gegeben.

Die Poissonverteilung

Ist bei einer Binomialverteilung n sehr groß, $a = \langle k \rangle = np$ jedoch klein (≈ 1), d.h. p wird klein, so kann unter der weiteren Voraussetzung, dass $a = np$ als konstant angenommen werden kann, die Poissonverteilung als Näherung verwendet werden. In diesem Fall gelten die Näherungsformeln

$$\frac{n!}{(n-k)!} \approx n^k$$

und

$$(1-p)^{n-k} \approx e^{-p(n-k)} \approx e^{-np}$$

Durch einsetzen folgt aus der Binomialverteilung die Poissonverteilung:

$$P(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad \text{mit} \quad a = np \quad (2.20)$$

2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Auf Grund der im Nenner auftretenden Fakultät, handelt es sich bei der Poissonverteilung wie bei der Binomialverteilung um eine in k diskrete Verteilung. Für kleine Wahrscheinlichkeiten p gilt $q = 1 - p \approx 1$ und somit folgt für den Erwartungswert und die Standardabweichung:

$$a = \langle k \rangle = V(k) = \sigma(k)^2 = np \quad (2.21)$$

Die Verteilung ist also nur durch den Erwartungswert der Messwerte bestimmt. Somit folgt für die Standardabweichung $\sigma(k) = \sqrt{np} = \sqrt{\langle k \rangle}$.

Abbildung 2.3 zeigt ein Beispiel für eine Poissonverteilung mit Erwartungswert 3.

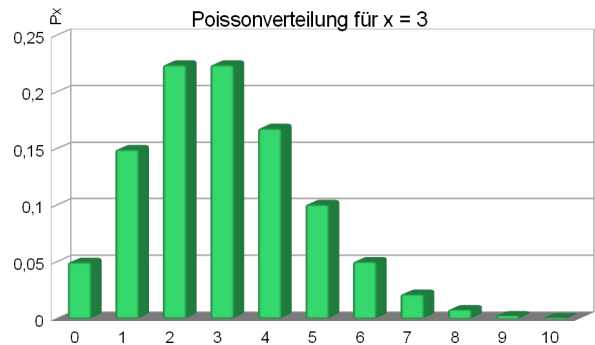


Abbildung 2.3: Beispiel einer Poissonverteilung mit $\langle x \rangle = 3$

Abbildung 2.3 zeigt, dass die Poissonverteilung für kleine Erwartungswerte a stark unsymmetrisch ist. Für große Erwartungswerte nimmt die Symmetrie hingegen zu und die Poissonverteilung lässt sich durch die Normalverteilung annähern. Die Poissonverteilung ist besonders für radioaktive Zerfälle relevant. Als Beispiel sei der α -Zerfall angeführt. Ist hierbei in einem kurzen Zeitintervall Δt die Wahrscheinlichkeit p für einen Zerfall in der Probe sehr klein, so lässt sich die Zahl der gemessenen Zerfälle innerhalb des Zeitraumes $n \cdot \Delta t$, unter der Annahme, dass die Zahl der zerfallenden Kerne näherungsweise konstant bleibt, durch eine Poissonverteilung beschreiben.

Aus der Betrachtung beider Verteilungen kann der Schluss gezogen werden, dass sowohl bei der Normalverteilung als auch bei der Poissonverteilung der relative mittlere Fehler des Mittelwertes

$$\frac{\bar{\sigma}}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \langle k \rangle}} \quad (2.22)$$

umgekehrt proportional zur Gesamtzahl $N \cdot \langle k \rangle$ aller gemessenen Impulse ist. Um einen relativen Fehler des Mittelwertes von 1 % zu erhalten, müssen also $N \cdot \langle k \rangle = 10.000$ Impulse gemessen werden.

2.3.3 Intervallverteilung

Teilt man die Messzeit in infinitesimal kurze aber gleich lange Zeitintervalle dt ein und betrachtet die zeitliche Abfolge zufälliger Ereignisse, so kann man sich Fragen, wie die Intervalle,

in denen kein Ereignis auftritt verteilt sind. Hierbei sollen die Intervalle so klein gewählt werden, dass das Auftreten von zwei Ereignissen in einem Intervall vernachlässigbar klein wird. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Intervall ein Ereignis auftritt $M = a \cdot t$. Wobei a die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit (bzw. die mittlere Zählrate pro Zeiteinheit) ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit davor kein Ereignis auftritt lässt sich aus der Poissonverteilung ermitteln und ist e^{-at} . Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, im Zeitintervall dt ein Ereignis zu finden zu

$$dP_t = ae^{-at} \tag{2.23}$$

Somit ergibt sich für die Intervallverteilung:

$$P_0 = a \cdot e^{-at} \tag{2.24}$$

Abbildung 2.4 zeigt ein Beispiel für eine Intervallverteilung mit $a = 1$ und einem Messwert pro Intervall.

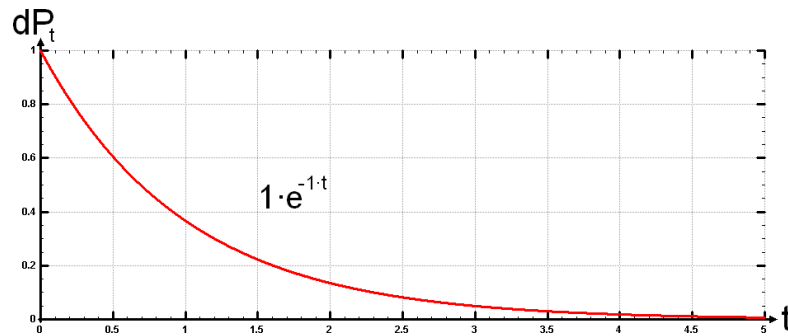


Abbildung 2.4: Beispiel einer Intervallverteilung mit $a = 1$ und einem Messwert pro Intervall

2.3.4 Intervallverteilung mit Totzeit

Die Aussage der Intervall-Verteilung wird insbesondere deutlich, wenn man den Einfluss der Messapparatur auf die Ergebnisse aus dem Messprozess berücksichtigt. Diese Messergebnisse werden hauptsächlich durch die Totzeit des Detektors verfälscht. Eine endliche Totzeit ergibt sich häufig schon aus der Zeitdauer für die elektronische Verarbeitung der vom Detektor kommenden Signale aber auch durch intrinsische Effekte des Detektors (hierzu in Abschnitt 4 mehr. Innerhalb dieser Totzeit können Ereignisse entweder nicht getrennt werden oder es kann nur ein Ereignis gemessen werden, was zu einer Verfälschung der statistischen Verteilung führt. Ohne Totzeit, würde sich eine Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert $M = at = \sigma^2$ ergeben, wobei T die Messzeit pro Messwert ist.

Durch die Totzeit τ hingegen kommt es zu einer Verschiebung des Mittelwertes gemäß:

$$M \rightarrow \bar{M} = \bar{a} \cdot T \tag{2.25}$$

Da die Ereignisse innerhalb der Totzeit τ nicht gemessen werden, kommt es zu einer scheinbaren Änderung der Zerfallsgeschwindigkeit. Die mittlere Zerfallszeit ergibt sich nun zu $\bar{t} = t + \tau$. Hiermit folgt für die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit:

$$a = \frac{\bar{a}}{(1 - \tau \cdot \bar{a})} \quad (2.26)$$

Womit sich der folgende Zusammenhang zwischen dem gemessenen und dem wahren Mittelwert ergibt:

$$M = a \cdot T = a \cdot \frac{\bar{M}}{\bar{a}} = \bar{M} \cdot \frac{1}{(1 - \tau \cdot \bar{a})} \quad (2.27)$$

Da alle Messwerte aus der ursprünglichen Poisson-Verteilung mit $\sigma^2 = M$ stammen, besitzt auch die neue Verteilung die gleiche relative Breite wie die ursprüngliche Verteilung. Für diese gilt:

$$\frac{\sigma}{M} = \frac{1}{\sqrt{M}} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{M}} \quad (2.28)$$

oder

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\bar{M}^2}{M} = \bar{M} \cdot \frac{\bar{a}}{a} \quad (2.29)$$

Unter verwendung von Gleichung 2.26 ergibt sich hiermit:

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{M} \cdot (1 - \tau \cdot \bar{a}) \quad (2.30)$$

sowie

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 \cdot \left(\frac{a}{\bar{a}}\right)^2 = \frac{\bar{M}}{(1 - \tau \cdot a)} = M \quad (2.31)$$

Die absolute Breite der neuen Verteilung ist also auf Grund der Verschiebung des Mittelwertes schmaler als die der ursprünglichen Verteilung.

Durch einfache oder mehrfache Untersetzung der Einzelereignisse ist es nun möglich verschiedene solcher Intervall - Verteilungen zu gewinnen. Demnach liegen bei einer s -fach Intervall-Verteilung zwischen den beiden das Zeitintervall definierenden Signalen jeweils noch $s - 1$ Ereignisse. Analog zu Gleichung 2.24 ergibt sich die s -fach Intervallverteilung zu:

$$P_{s-1} = a \cdot \frac{(a \cdot t)^{s-1}}{(s-1)!} \cdot e^{-at} \quad (2.32)$$

Abbildung 2.5 zeigt Beispiele für einfach und mehrfach untersetzte Untervallverteilungen. Die Abbildung verdeutlicht, dass die Intervallverteilung für große s gegen eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $M = a \cdot t$ konvergiert. Dies spiegelt gerade die Tatsache wieder, dass man für lange Messzeiten T im Mittel $m = a \cdot T$ Messereignisse messen wird.

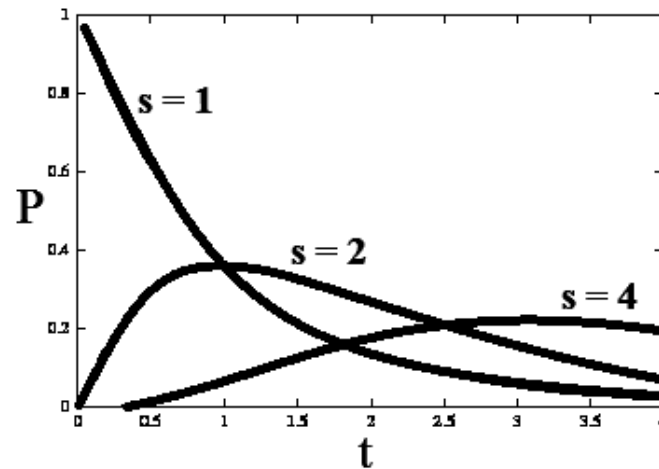


Abbildung 2.5: Beispiele für 1, 2 und 4-fach untersetzte Intervallverteilungen

2.4 Pearsons χ^2 -Test

Möchte man wissen, ob eine Messung einer gegebenen Verteilung entspricht, kann man Pearsons χ^2 -Test durchführen. Dabei teilt man die Messwerte zunächst in N gleich große Kategorien/Intervalle auf und bestimmt wie viele Ereignisse in dieser Kategorie gemessen wurden und wie viele nach der gegebenen Verteilung in dieser Kategorie liegen sollten (z.B. durch einen Fit der Messwerte mit der erwarteten Verteilung). Die Güte der angepassten Verteilung kann nun mit dem χ^2 -Test ermittelt werden. Hierbei sollte es mindestens 5 Kategorien geben und in jeder Kategorie sollten mindestens 5 Ereignisse liegen.

Als ersten Schritt berechnet man die Größe

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \frac{(x_{i,\text{gemessen}} - x_{i,\text{theo}})^2}{x_{i,\text{theo}}} \quad (2.33)$$

wobei die Summation über alle N Kategorien erfolgt. Die theoretischen Werte ergeben sich jeweils aus dem Fit der zu untersuchenden Verteilung. Weiterhin wird die Anzahl der Freiheitsgrade f des Fits benötigt. Diese ergibt sich aus der Zahl der Datenpunkte, also der Kategorien N abzüglich der Parameter a der Fitfunktion.

$$f = N - a \quad (2.34)$$

Bei einer unnormierten Normalverteilung würde sich als Beispiel $a = 3$ ergeben, so dass bei 100 Kategorien noch 97 Freiheitsgrade vorhanden sind. Anschließend ermittelt man aus Graphik 2.6 oder einer entsprechenden Tabelle die Wahrscheinlichkeit P , dass eine zufällige Versuchsreihe, welche der Verteilung gehorcht, stärker von der Verteilung abweicht, als die Messung. Liegt das Ergebnis, zwischen 10% und 90%, kann man davon ausgehen, dass die Messung der Verteilung gehorcht. Liegt das Ergebnis unter 2% oder über 98%, so muss die Verteilung ernsthaft in Frage gestellt werden.

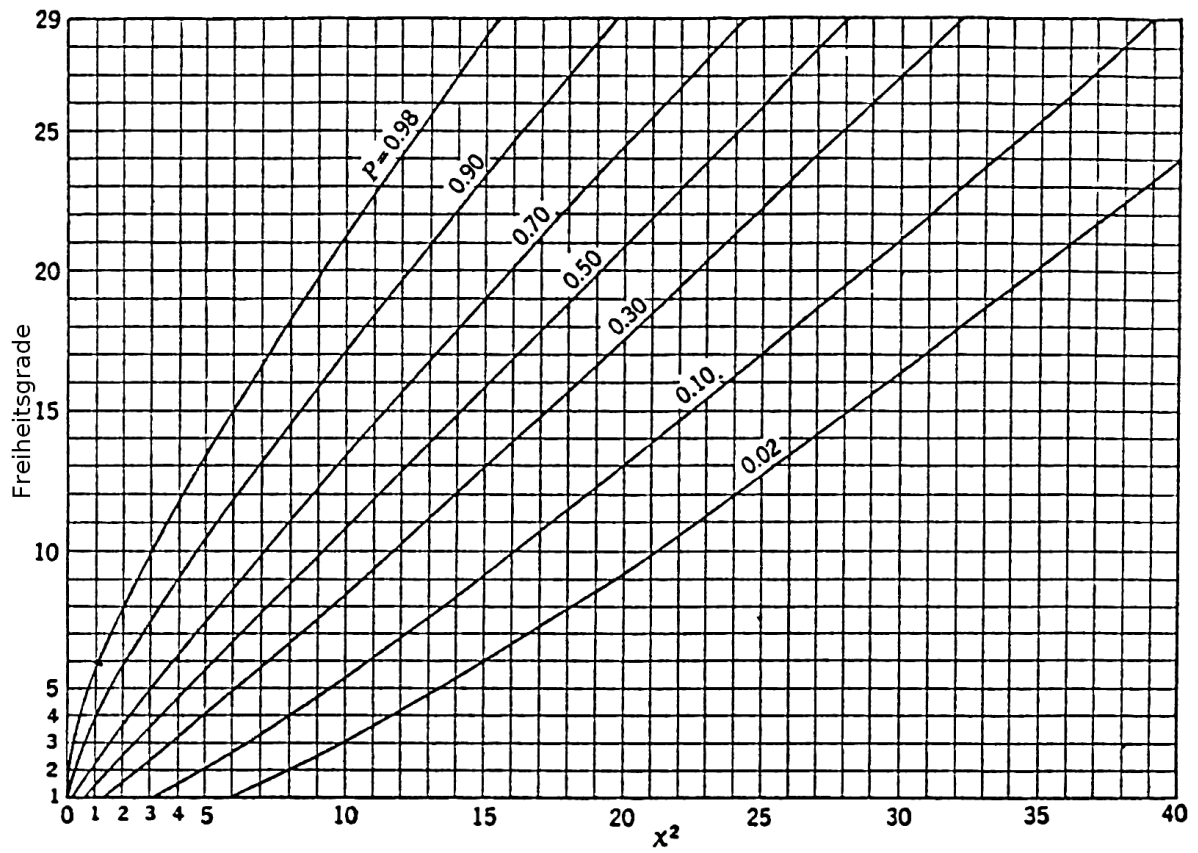


Abbildung 2.6: Wahrscheinlichkeit P, dass eine Zufällige Verteilung mit einer bestimmten Anzahl an Freiheitsgraden ein gewisses χ^2 überschreitet.

Kapitel 3

Entstehung und Energie von Gammastrahlung

Da für die Messungen mit dem Geiger-Müller-Zählrohr Gammastrahlung eines ^{60}Co - Präparats verwendet wird, soll im folgenden Kapitel ein kurzer Überblick über die Entstehung und den Energiebereich dieser Strahlung gegeben werden. Ähnlich wie die Elektronenhülle der Atome ist auch der Atomkern durch diskrete Energieniveaus charakterisiert. Übergänge zwischen diesen Energieniveaus können durch Emission oder Absorption von elektromagnetischer Strahlung der entsprechenden Energie, also genau der Energie, die der Energiedifferenz zwischen den Energieniveaus des Atomkerns entspricht, erreicht werden. Die Energie der dabei emittierten Photonen reicht vom Kiloelektronenvoltbereich bis hin zu etwa 10 Megaelektronenvolt, mit der Plank'schen Konstante h und der Lichtgeschwindigkeit c entspricht dies nach

$$E_\gamma = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad (3.1)$$

einem Wellenlängenbereich λ_γ von 10^{-10} m bis 10^{-13} m, welcher im Bereich unterhalb der charakteristischen Größe eines Atoms liegt. Solche hochenergetischen Photonen werden historisch bedingt Gammastrahlung genannt. Bei Gammastrahlung handelt es sich wie beim sichtbaren Licht und der Röntgenstrahlung um elektromagnetische Strahlung. Abbildung 3.1 zeigt, dass Gammastrahlung energetisch oberhalb der Röntgenstrahlung im elektromagnetischen Spektrum einzuordnen ist.

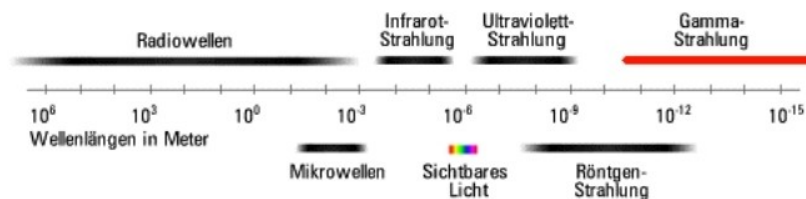


Abbildung 3.1: Spektrum der elektromagnetischen Strahlung

Gammastrahlung tritt häufig als Begleiterscheinung von α - oder β -Zerfällen auf, wobei der Atomkern überschüssige, noch vorhandene Anregungsenergie in Form eines oder mehrerer

Gammaquanten abgibt und von einem höheren (angeregten) zu einem niedrigeren Energieniveau übergeht. Durch einen Gammazerfall werden also lediglich der Energieinhalt des Kerns, nicht jedoch die Kernladungs- oder Massenzahl verändert. Da im Kern diskrete Energieniveaus vorliegen, wird beim Gammazerfall Strahlung mit diskreten Energien emittiert. Die im Versuch verwendete Gammastrahlung des ^{60}Co - Präparats besitzt zwei diskrete Energien von 1175 keV und 1333 keV. Für das Ziel des Versuchs spielt dies jedoch eine untergeordnete Rolle, da das Geiger-Müller-Zählrohr nicht Energiesensitiv ist und genauso gut jeder andere Gammastrahler mit genügend Aktivität verwendet werden kann. Da in diesem Versuch nicht genauer auf die Gammastrahlung eingegangen wird, sei für eine detailliertere Betrachtung auf Versuch 3 bzw. Versuch 8 und 9 verwiesen.

Kapitel 4

Aufbau und Physik des Geiger-Müller-Zählrohres

Da die statistischen Analysen in diesem Versuch anhand der Messwerte eines Geiger-Müller-Zählrohres durchgeführt werden sollen, sollen in diesem Abschnitt der grundlegende Aufbau und die funktionellen Besonderheiten eines solchen Zählrohres genauer betrachtet werden.

4.1 Motivation

Im Jahr 1900 wurde durch den französischen Physiker und Chemiker Paul Villard eine Strahlung hoher Energie entdeckt, die ihren Ursprung in den Kernen der Atome hat und die γ -Strahlung genannt wurde. Wenige Jahre später (1914) konnten Ernest Rutherford und Edward Andrade die elektromagnetische Natur dieser Strahlung nachweisen. Diese neu entdeckte hochenergetische Quantenstrahlung ist wie andere Strahlungsarten (α , β usw.) für den Menschen zunächst nicht wahrnehmbar, da er hierfür kein Sinnesorgan besitzt. Da die von einem Atomkern emittierte Strahlung zum Einen Rückschlüsse auf den energetischen Aufbau des Kerns und die stattfindenden Übergänge zulässt, zum Anderen aber auch biologische Schäden an lebenden Organismen hervorrufen kann, ist man seit jeher bemüht Detektoren zu entwickeln, welche diese Strahlung möglichst effektiv nachweisen und charakterisieren können. Seit dem Beginn der Erforschung der Atomkerne und später deren elementaren Bestandteile in der Hochenergiephysik, spielt Gamma- und Teilchenstrahlung auch in der Wissenschaft eine entscheidende Rolle, da ihr Nachweis die Grundlage zur Untersuchung von elementaren Teilchenprozessen und Kernreaktionen darstellt. Neben diesen Anwendungen in der Grundlagenforschung, stellt jedoch auch die medizinische Strahlentherapie und Diagnostik eine wichtige Anwendung für Strahlungsdetektoren dar.

Das Geiger-Müller Zählrohr wurde bereits 1928 von den Physikern H. Geiger und W. Müller erfunden. Es dient als Nachweisgerät für ionisierende Strahlung / Teilchen, wobei jedoch nur das Eintreffen dieser Strahlung, nicht jedoch deren Typ und Energie detektiert werden kann. Ionisationsdetektoren wie das Geiger-Müller Zählrohr gehörten zu den ersten elektrischen Geräten zum Nachweis radioaktiver Strahlung. Vor ihrer Entdeckung, war die einzige Möglichkeit radioaktive Strahlung nachzuweisen selbige auf einen Szintillationsschirm zu schicken und die entstehenden Lichtblitze mit dem Auge zu beobachten (da es zu jener Zeit noch keine

elektrischen Detektionsmöglichkeiten wie Photomultiplier gab). Dies ist jedoch nicht einfach, da die Lichtblitze in der Regel sehr kurz und schwach sind und nur mit geeigneten optischen Hilfsmitteln (z.B. einer Lupe) mit dem Auge erfasst werden können. Mit dem Geiger-Müller-Zählrohr war man schließlich in der Lage diese Strahlung zuverlässig zu messen. Zudem ist das Ausgangssignal des Detektors elektrisch und kann elektronisch verstärkt und weiterverarbeitet werden, was zum ersten mal eine Detektion auch höherer Zählraten über einen längeren Zeitraum ermöglichte.

Nachdem Ionisationsdetektoren in den 1940ern durch die Entwicklung des Photomultipliers und die damit ermöglichte elektronische Auslese von Szintillationskristallen weitgehend aus der kernphysikalischen Forschung verdrängt wurde, stießen sie in den 1960ern in Form von Vieldrahtproportionalkammern, Driftkammern und Zeitprojektionskammern erneut auf starkes Interesse.

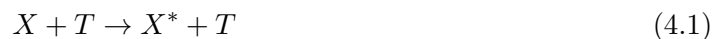
Die eigentlichen Geiger-Müller-Zählrohre sind in der heutigen Forschung kaum noch im Einsatz. Trotzdem hilft das Verständnis der Funktionsweise dieses Detektortyps beim Verstehen der Nachfolgertypen wie z.B. der Vieldrahtproportionalkammer oder der Driftkammer. Weiterhin können anhand dieses Detektors einige Besonderheiten der Messstatistik auf einem einfachen Niveau behandelt werden, da das Geiger-Müller-Zählrohr lediglich eine Information über die Zählrate liefert. Weiterhin sind solche Zählrohre günstig in der Anschaffung und einfach zu Betreiben, weshalb sie in Laboren immer noch als Strahlungsmonitore eingesetzt werden.

4.2 Physikalische Grundlagen

Zum vertieften Verständnis der im Zählrohr ablaufenden Prozesse sollen im folgenden Abschnitt einige grundlegende Ionisations- und Ladungstransportphänomene in Gasen genauer betrachtet werden, bevor die Funktion des eigentlichen Zählrohres erläutert wird.

4.2.1 Ionisations- und Rekombinationsmechanismen

Ionisationsmechanismen: Der Energieverlust eines geladenen Teilchens in Materie wird im wesentlichen durch zwei Arten von Reaktionen bestimmt. Zum Einen durch die Anregung und zum Anderen durch die Ionisation, bei welcher freie Elektronen und Ionen entstehen. Die Anregung eines Atoms X durch ein geladenes Teilchen T kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:



Hierbei handelt es sich um eine resonante Reaktion, bei der ein wohl definierter Energiebetrag übertragen wird. Die Wirkungsquerschnitte für diesen Prozess liegen im Resonanzbereich von Edelgasen bei etwa $\sigma \approx 10^{-17} \text{cm}^2$. Da keine freien Elektronen entstehen, kann das so angeregte Atom durch weitere Reaktionen ionisiert werden.

Bei der Ionisation wird hingegen kein fester Energiebetrag benötigt.



Der Wirkungsquerschnitt ist hier mit $\sigma \approx 10^{-16} \text{cm}^2$ etwas höher als bei der Anregung. Da die Ionisation jedoch eine relativ hohe Mindestenergie benötigt und da geringe Energieüberträge wahrscheinlicher sind, dominieren in der Regel Anregungsreaktionen.

Da die Energie der bei der Ionisation frei werdenden Elektronen oft recht groß ist, können diese weitere Ionisationen hervorrufen.

Mittlere Anzahl der freien Elektron-Loch-Paare: Da das Auftreten von Ionisationsreaktionen statistischer Natur ist, werden zwei identische Teilchen in der Regel nicht die selbe Anzahl an Elektron-Ion-Paaren erzeugen. Von Interesse ist daher die mittlere Anzahl der bei einem bestimmten Energieverlust erzeugten Elektron - Ion - Paare. Aufgrund der zusätzlich auftretenden Anregungsreaktion ist diese mittlere Anzahl nicht gleich dem Energieverlust geteilt durch das Ionisationspotential, sondern muss individuell bestimmt werden. Bei Gasen erhält man in der Regel etwa 1 Elektron-Ion-Paar pro 30 eV deponierter Energie. Dieser Wert hängt nur schwach vom Gas und von der Teilchensorte ab. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die mittlere Energie für ein Elektron-Ion-Paar bei verschiedenen Gasen.

| | Anregungspot. [eV] | Ionisationspot. [eV] | E_{Avg} . Elektron-Loch-Paar [eV] |
|--------|--------------------|----------------------|-------------------------------------|
| H_2 | 10,8 | 15,4 | 37 |
| He | 19,8 | 24,6 | 41 |
| N_2 | 8,1 | 15,5 | 35 |
| O_2 | 7,9 | 12,2 | 31 |
| Ne | 16,6 | 21,2 | 36 |
| Ar | 11,6 | 15,8 | 26 |
| Kr | 10,0 | 14,0 | 24 |
| CO_2 | 10,0 | 13,7 | 33 |

Tabelle 4.1: Mittlere Energie zur Erzeugung eines Elektron-Ion-Paares bei verschiedenen Gasen. Zum Vergleich sind das Anregungspotential und das Ionisationspotential angegeben.

Diese mittlere Energie für ein Elektron-Ion-Paar ist der entscheidende Faktor für die Effizienz und die Energieauflösung eines Detektors, welche im Rahmen dieses Versuchs jedoch nicht genauer betrachtet werden sollen.

Rekombination und Elektroneneinfang Für die Anwendung in einem Detektor ist es weiterhin von Bedeutung, dass die Elektron-Ion-Paare lange genug in einem freien Zustand bleiben um aufgesammelt zu werden. Hierbei gibt es zwei Prozesse die dem entgegenwirken: Die Rekombination und die Elektronenanlagerung. Im Fall, dass kein elektrisches Feld vorhanden ist, werden Elektronen und Ionen in der Regel auf Grund der Anziehungskraft ihres elektrischen Feldes rekombinieren und dabei ein Photon aussenden.



Auch bei molekularen Ionen kann eine ähnliche Reaktion auftreten.



Die Rekombinationsrate hängt in der Regel von der Konzentration der negativen n^- und positiven n^+ Ionen bzw. Elektronen ab. und lässt sich mit einer vom Gas abhängigen Konstanten (const.) beschreiben durch

$$dn = \text{const.} \cdot n^- \cdot n^+ dt \quad (4.5)$$

Setzt man $n^+ = n^- = n$ so liefert die Integration, die Zeitabhängigkeit der vorhandenen Elektron-Ion-Paare:

$$n = \frac{n_0}{1 + \text{const.} \cdot n_0 \cdot t} \quad (4.6)$$

wobei n_0 die Konzentration zur Zeit $t=0$ ist.

Bei der Elektronenanlagerung werden Elektronen von elektronegativen Atomen bzw. Molekülen (z.B. O_2, H_2O, CO_2 eingefangen, wodurch negative Ionen entstehen.



4.2.2 Transport von Elektronen und Ionen in Gasen

Für Ionisationsdetektoren ist besonders die Bewegung der Ionen von Bedeutung, da diese viele Betriebscharakteristiken beeinflusst. In weiten Teilen kann diese Bewegung durch die klassische kinetische Gastheorie beschrieben werden, wobei vor allem die Diffusion und der Drift in einem elektrischen Feld von Bedeutung sind.

Diffusion: Ohne Beeinflussung durch ein elektrisches Feld diffundieren die Elektronen und Ionen gleichmäßig verteilt in alle Richtungen von ihrem Erzeugungsort weg. Hierbei erfahren Sie eine Reihe von Stößen mit den Gasmolekülen und verlieren so ihre Energie, was schließlich dazu führt, dass Sie ins thermische Gleichgewicht mit dem Gas kommen und evtl. rekombinieren. Die Geschwindigkeit der Teilchen im thermischen Gleichgewicht ist durch die Maxwellverteilung gegeben und hat einen mittleren Wert von

$$v = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m}} \quad (4.8)$$

Hierbei ist k die Boltzmann-Konstante, T die Temperatur und m die Masse des Teilchens. Aus Gleichung 4.8 ergibt sich direkt, dass die mittlere Geschwindigkeit von Elektronen auf Grund ihrer viel kleineren Masse deutlich höher ist als die von Ionen. Sie liegt etwa bei ein paar mal 10^6 cm/s , während die Ionengeschwindigkeit nur etwa 10^4 cm/s beträgt. Die mittlere Ausbreitungsstrecke eines Ions oder Elektrons nach der Zeit t kann bei einer Gaußförmigen Verteilung mit dem Diffusionskoeffizienten D in 2 Dimensionen durch

$$\sigma(x) = \sqrt{2 \cdot D \cdot t} \quad (4.9)$$

und bei einer Ausbreitung in 3 Dimensionen durch

$$\sigma(x) = \sqrt{6 \cdot D \cdot t} \quad (4.10)$$

beschrieben werden. Der Diffusionskoeffizient berechnet sich dabei zu

$$D = \frac{1}{3} v \cdot \lambda \quad (4.11)$$

Mit der mittleren freien Weglänge λ des Elektrons oder Ions

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{kT}{\sigma_0 \cdot p} \quad (4.12)$$

wobei T die Temperatur, p der Gasdruck und σ_0 der totale Wirkungsquerschnitt für die Kollision mit einem Gasmolekül ist. Zusammen folgt durch einsetzen:

$$D = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma_0 \cdot p} \sqrt{\frac{(kT)^3}{m}} \quad (4.13)$$

Drift im elektrischen Feld: Unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes werden die Elektronen und Ionen entlang der Feldlinien zur Anode bzw. Kathode beschleunigt. Diese Beschleunigung wird jedoch durch Kollisionen mit den Gasmolekülen unterbrochen, wodurch die Geschwindigkeit limitiert wird. Die mittlere Geschwindigkeit wird auch Driftgeschwindigkeit genannt und ist stets mit der thermischen Bewegung überlagert. Gewöhnlich ist die Driftgeschwindigkeit im Vergleich zur thermischen Geschwindigkeit gering. Lediglich bei Elektronen kann die Driftgeschwindigkeit auf Grund der geringen Masse deutlich höher als die thermische Geschwindigkeit werden. In der kinetischen Gastheorie führt man zur Beschreibung des Drifts die Mobilität μ einer Ladung ein.

$$\mu = \frac{u}{E} \quad (4.14)$$

Wobei u die Driftgeschwindigkeit und E die Stärke des elektrischen Feldes ist.

Für positive Ionen hängt die Driftgeschwindigkeit noch bis hin zu relativ hohen elektrischen Feldern linear vom reduzierten elektrischen Feld E/p mit dem Druck p ab. Was bedeutet, dass die Mobilität μ in diesem Fall eine Konstante ist. Weiterhin wird deutlich, dass sich μ bei einem konstanten Feld E invers zum Druck p regulieren lässt. In einem idealen Gas, in dem die sich bewegenden Ladungen im thermischen Gleichgewicht bleiben lässt sich auch zeigen, dass die Mobilität mit der Diffusionskonstante gemäß

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{e} \quad (4.15)$$

zusammenhängt.

Die Mobilität der Elektronen hingegen ist deutlich höher und kann als Funktion des elektrischen Feldes E beschrieben werden. Hier können Geschwindigkeiten von einigen 10^6 cm/s erreicht werden, bevor eine Sättigung einsetzt.

4.2.3 Die Lawinenbildung

Eine Lawinenbildung setzt ein, wenn die primären Ionisationselektronen durch das beschleunigende elektrische Feld genügend Geschwindigkeit erhalten um selbst wieder Gasmoleküle zu ionisieren. Die so entstandenen Elektronen können im Anschluss selbst wieder weitere Ionisationen hervorrufen usw., wodurch eine Elektronenlawine entsteht. Auf Grund der höheren Mobilität der Elektronen, hat ein solcher Schauer die Form eines Flüssigkeitstropfens, wobei sich die Elektronen in der Spitze sammeln, während die Ionen noch im hinteren Schweif sind. (siehe Abb. 4.1)

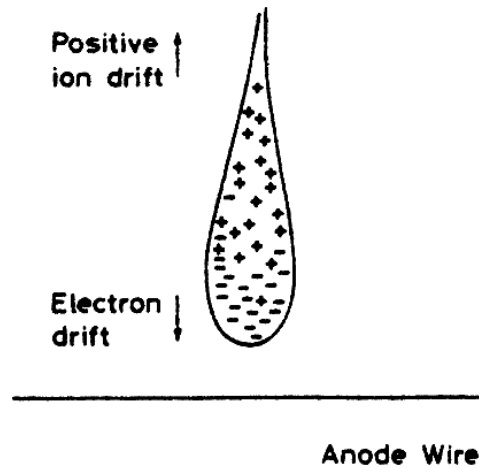


Abbildung 4.1: Ladungsverteilung bei der Schauerbildung. Die Elektronen befinden sich auf Grund ihrer höheren Mobilität an der Spitze (unten) des Tropfens.

Mit der mittleren freien Weglänge λ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit a für eine sekundäre Ionisation pro Wegstrecke zu:

$$a = \frac{1}{\lambda} \quad (4.16)$$

Geht man von n_0 Elektronen aus, so ergeben sich die Elektronen, die auf einer Wegstrecke x erzeugt werden zu:

$$n(x) = n_0 \cdot e^{a \cdot x} \quad (4.17)$$

Der Multiplikationsfaktor für ein homogenes elektrisches Feld ergibt sich demnach zu:

$$M = \frac{n}{n_0} = e^{a \cdot x} \quad (4.18)$$

Der Multiplikationsfaktor ist durch das sogenannte Raether Limit auf etwa $M < 10^8$ bzw. $a \cdot x < 20$ begrenzt, wonach es zum Durchbruch kommt.

4.3 Aufbau und Funktion eines Zählrohres

Im folgenden soll der Aufbau und die Charakteristika für den Spezialfall eines zylindrischen Zählrohres betrachtet werden. Ein solches Geiger-Müller-Zählrohr besteht aus einer einseitig geschlossenen Metallröhre, welche auf der anderen Seite nur mit einem dünnen Glimmerfenster verschlossen, so dass Teilchen der radioaktiven Strahlung dort möglichst ungehindert eintreten können. Die Metallröhre ist geerdet und bildet die Kathode des Systems. Sie ist komplett mit einem Gasgemisch aus einem Edelgas und einem Löschgas bei einem Druck von etwa 100 mbar befüllt (hierzu in Abschnitt 4.4.1 mehr). In der Mitte der Röhre befindet sich ein nur wenige μm dicker Anodendraht, welcher an der Durchführung durch die hintere Wand der Röhre vom Metallgehäuse durch einen Isolator getrennt ist. Abbildung 4.2 zeigt eine schematische Darstellung des Geiger-Müller-Zählers mit der primären elektronischen Beschaltung. Der Anodendraht, an welchem eine positive Spannung anliegt, ist außerhalb des Detektors über einen Arbeitswiderstand R_2 ($> 1 \text{ M}\Omega$) mit der Spannungsquelle verbunden.

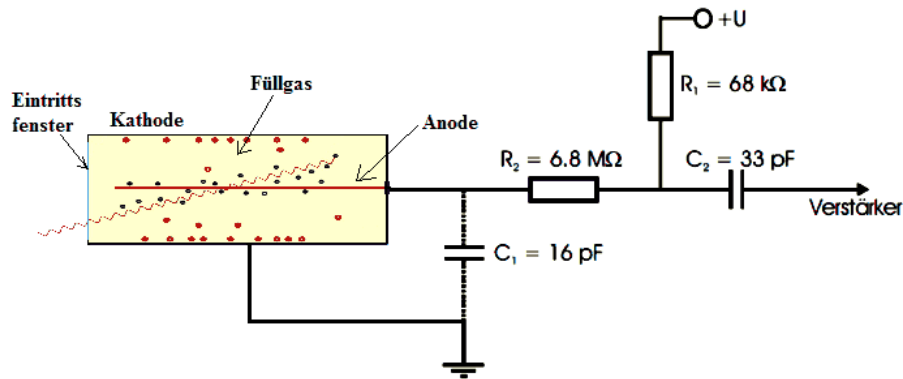


Abbildung 4.2: Aufbau und primäre elektrische Beschaltung eines Zählrohres [An09].

Der Widerstand R_1 symbolisiert den Innenwiderstand der Spannungsquelle und kann hier vernachlässigt werden. Über den Kondensator C_2 kann das Signal schließlich ausgekoppelt und an einen Verstärker übergeben werden. Dieser Kondensator trennt außerdem die zum Betrieb des Detektors nötige Hochspannung vom Verstärker und der Signalverarbeitung. Der Anodendraht bildet in diesem Aufbau mit dem Metallzylinder einen Zylinderkondensator mit der Kapazität C_1 , welche in Abbildung 4.2 exemplarisch als externer Kondensator dargestellt ist. Für das elektrische Feld innerhalb dieses Kondensators gilt:

$$E = \frac{1}{r} \cdot U \quad (4.19)$$

Hierbei ist r der radiale Abstand zur zentralen Achse, a der Radius des Drahtes und b der Radius des Zylinders.

Nachdem die grundlegende Beschaltung erläutert wurde, soll nun auf die eigentliche Funktionsweise des Detektors eingegangen werden. Die zu detektierende Strahlung tritt zunächst durch das Fenster in das Zählrohr ein und ionisiert die Atome des Edelgases entlang ihrer Flugbahn. Dies kann bei geladenen Teilchen direkt erfolgen, während es bei neutralen Teilchen durch Sekundärreaktionen erfolgt. Die hierbei frei werdenden Elektronen werden nun zum Anodendraht hin beschleunigt und können je nach Spannung noch Sekundärionisationen hervorrufen (Hierzu in Abschnitt 4.4 mehr), während die positiven Ionen zu Kathode driften. Durch die driftenden Ladungen lädt sich schließlich die Kapazität auf und kann schließlich über den Widerstand entladen werden. Der genaue Prozess der Signalentstehung wird in Abschnitt 4.4.2 behandelt.

4.4 Arbeitsbereiche des Zählrohres

In einem Zählrohr mit vorgegebener Form und Gasgemisch, ist die letzte freie Größe die Spannung mit der es betrieben wird. Die angelegte Spannung ist eine der entscheidenden Größen eines Zählrohres, da mit ihr festgelegt werden kann, ob das Zählrohr als Ionisationskammer, Proportionalitätszähler oder Geiger-Zähler betrieben wird. Abbildung 4.3 zeigt den Zusammenhang zwischen der angelegten Betriebsspannung und dem Verstärkungsfaktor des

4.4 Arbeitsbereiche des Zählrohres

Zählrohres. Die Abbildung verdeutlicht auch, dass schwere bzw. mehrfach geladene Teilchen wie α -Teilchen mehr Primärionisationen hervorrufen wie die deutlich leichteren Elektronen der Betastrahlung. Im folgenden Abschnitt sollen die einzelnen Bereiche und die in diesen

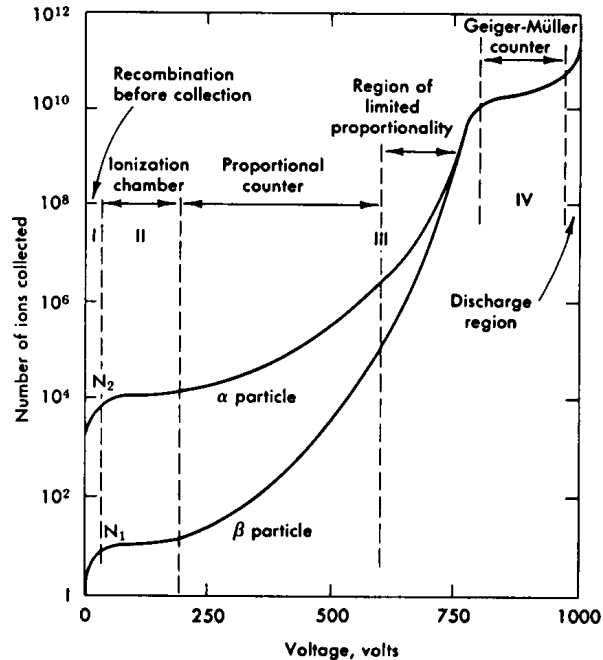


Abbildung 4.3: Anzahl gesammelter Ionen in Abhängigkeit der angelegten Zählrohrspannung. Die Spannung ist in vier Bereiche eingeteilt, die sich in den vorherrschenden physikalischen Effekten unterscheiden und somit unterschiedliche Betriebsmodi darstellen.

auftretenden physikalischen Prozesse genauer erläutert werden.

Rekombinationsbereich: Liegt zwischen Anodendraht und Kathode keine oder nur eine sehr geringe Spannung an (Bereich I in Abb. 4.3), so können die Elektronen und Ionen die Anode bzw. Kathode nicht erreichen, sondern rekombinieren zuvor wieder. Erhöht man die Spannung nun langsam, so können immer mehr Elektronen die Anode erreichen, da bei höheren Spannungen die Anziehungskräfte der Ionen, welche die Rekombination bewirken, überwunden werden können. Setzt man das Zählrohr in diesem Bereich ein, so kann keine Aussage über Strahlungsart und Energie gemacht werden. Weiterhin ist das Signal so gering, dass es ohne weitere Hilfsmittel nur schwer messbar ist.

Betrieb als Ionisationskammer: Ab einer bestimmten Betriebsspannung erreichen alle primär erzeugten Ladungen die Anode und die Kathode (Bereich II in Abb. 4.3). Ein weiteres Erhöhen der Spannung zeigt zunächst keinerlei Effekt. Die Elektronen driften in Richtung positiv geladenem Draht (Anode) und die positiv geladenen Ionen in Richtung Metallröhre, die als Kathode funktioniert. Die aufgesammelte Ladung ist in diesem Betriebsmodus gleich der Primärladung, die durch die radioaktive Strahlung selbst verursacht wird und somit proportional zur Energie der einfallenden Strahlung. Detektoren, die in diesem Spannungsbereich arbeiten bezeichnet man als Ionisationskammer. Da das Signal sehr klein ist, muss es mit einem Elek-

trometer nachgewiesen werden. Ionisationskammern kommen in der Regel zur Messung der Exposition mit Gammastrahlung und zur Überwachung hoher Strahlungsflüsse zum Einsatz.

Proportionalitätsbereich: Erhöht man die Spannung über den Bereich der Ionisationskammer hinaus, so steigt der durch die Elektronen verursachte Strom wieder mit der Spannung an (Bereich III in Abb. 4.3). In diesem Bereich wird das elektrische Feld zunächst in der Nähe des inneren Drahtes und bei höheren Spannungen auch weiter außen so stark und damit die kinetische Energie der Elektronen so hoch, dass diese schnell genug werden um weitere Moleküle des Füllgases zu ionisieren. Die sekundär erzeugten Elektronen werden wiederum beschleunigt und ionisieren weitere Gasmoleküle. Hierdurch kommt es zu einer Ionisationslawine. Da das elektrische Feld wie Gleichung 4.19 zeigt in der Nähe des zentralen Drahtes am größten ist, ist dieser Effekt hier am Größten und tritt sehr schnell auf. Die Anzahl der Elektron-Ion-Paare in der Lawine ist direkt proportional zur Anzahl der primär erzeugten Elektronen, wodurch es zu einer proportionalen Verstärkung des Stromes kommt. Der Verstärkungsfaktor hängt stark von der angelegten Spannung ab und kann Werte von bis zu 10^6 erreichen, was um ein vielfaches höher als der Output der Ionisationskammer ist. Ein Detektor, welcher in diesem Spannungsbereich arbeitet, wird auch als Proportionalitätskammer bezeichnet.

Bereich eingeschränkter Proportionalität: Wird die Spannung über den Proportionalitätsbereich hinaus erhöht, so wird die Gesamte durch Multiplikation erzeugte Ladung so hoch, dass die sich um den Anodendraht ansammelnde Raumladung, das elektrische Feld in diesem Bereich verzerrt. Hierdurch ist eine Proportionalität nicht mehr gegeben.

Plateaubereich: Erhöht man die Spannung weiter, so wird die Feldstärke und damit die kinetische Energie der Elektronen so hoch, dass eine Entladung im Gas einsetzt. Physikalisch bedeutet dies, dass statt einer einzelnen an einem bestimmten Punkt der Anode lokalisierten Kaskade (vgl. Proportionalitätszähler) eine ganze Kettenreaktion von mehreren entlang der gesamten Länge des Zählrohres verteilter Kaskaden ausgelöst wird (Bereich IV in Abb. 4.3). Abbildung 4.4 zeigt eine schematische Darstellung der ablaufenden Prozesse. Diese sekun-

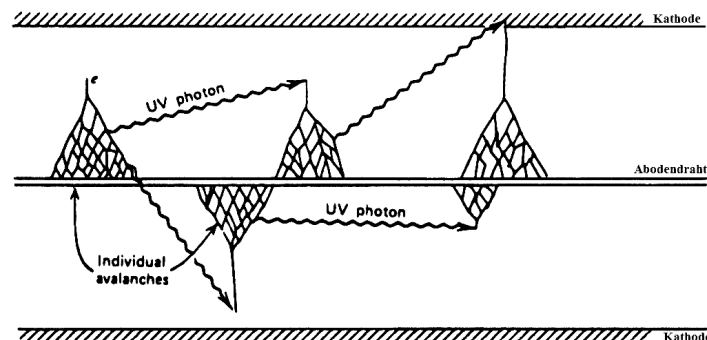


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung der im Plateaubereich ablaufenden physikalischen Prozesse

dären Kaskaden werden durch Photonen ausgelöst, welche von sich abregenden Molekülen emittiert werden und an einer anderen Stelle des Zählrohres eine Primäriionisation hervorrufen. Der erzeugte Strom wird hierbei komplett saturiert und besitzt immer die selbe Amplitude.

de, unabhängig von der Energie des primären Ereignisses. Um diese Gasentladung wieder zu stoppen, muss dem Füllgas ein Löschgas zugesetzt werden, welches die Photonen absorbiert und ihre Energie auf andere Abregungskanäle überträgt. Somit treten keine Lawinen mehr auf, sobald das Feld im Inneren des Zylinders durch die positiven Ionen in der Nähe der Anode genügend abgeschwächt wurde. Detektoren die in diesem Plateaubereich arbeiten werden als Geiger-Müller-Zähler bezeichnet. Die Stromstärke ist innerhalb dieses Plateaus nahezu unabhängig von der Spannung. Die Größe dieses Plateaubereichs wird entscheidend durch die Effizienz des Löschgases bestimmt. In der Praxis wird die Arbeitsspannung eines Geiger-Zählers so gewählt, dass sie in der Mitte des Plateaus liegt, um unempfindlich gegenüber Schwankungen und Drifts der Betriebsspannung zu sein.

Gasentladungsbereich: Erhöht man die Spannung über das Plateau hinaus, so kommt es zu einer Glimmentladung. Diese wird auch ohne Einfluss von radioaktiver Strahlung aufrechterhalten, da das Füllgas allein durch die angelegte Spannung ionisiert wird. Dieser Bereich sollte beim Arbeiten mit dem Zählrohr vermieden werden, da das Zählrohr sonst zerstört wird.

4.4.1 Wahl des Füllgases

Bei der Wahl des optimalen Füllgases müssen eine ganze Reihe von Faktoren berücksichtigt werden. Neben einer geringen Arbeitsspannung, einer hohen Verstärkung und einer guten Proportionalität spielt auch eine hohe Ratenfähigkeit eine Rolle. Um eine geringe Arbeitsspannung zu erhalten, wählt man in der Regel Edelgase, da diese die geringste elektrische Feldstärke zur Lawinenbildung benötigen. Weiterhin besitzen Edelgase eine negative Elektronenaffinität, so dass die freien Elektronen nicht von neutralen Molekülen eingefangen werden. Besonders Argon bietet sich auf Grund seiner hohen spezifischen Ionisation und seiner geringen Kosten an. Argon kann jedoch auf Grund seiner hohen Anregungsenergie (11.6 eV) nicht mit hohen Verstärkungen (Betrieb als Proportional- oder Geigerzähler) eingesetzt werden, ohne dass eine kontinuierliche Gasentladung eintritt, da angeregte Argonatome bei ihrer Abregung hochenergetische Photonen aussenden, welche weitere Lawinen auslösen. Dieses Problem kann durch die Zugabe von Polyatomaren Gasen wie Methan oder Alkohol aber auch organische Gase wie CO_2 oder BF_3 gelöst werden. Solche Gase wirken als Löschgase (Quencher), welche die Photonen absorbieren und sich durch Dissoziation oder elastische Stöße abregen. Eine gängige Mischung ist 90% Argon und 10% Methan (Auch P10 Gas genannt). Hiermit können Multiplikationsfaktoren von bis zu 10^6 erreicht werden. Besonders bei hohen Strahlungsraten können organische Löschgase bei der Rekombination dissoziierter organischer Moleküle feste oder flüssige Polymere ausbilden, welche sich an der Anode oder Kathode ablagern und die Charakteristiken des Zählrohres verändern. Dieses Problem kann entweder durch die Wahl eines anorganischen Löschgases, welches jedoch weniger effizient ist oder durch die Zugabe einer kleinen Menge einer Lösungssubstanz, welche die organischen Verbindungen wieder auflöst, gelöst werden.

4.4.2 Signalbildung und Signalform eines Zählrohres

Die Pulsform, welche an den Elektroden eines Ionisationsdetektors gemessen wird kommt nicht wie man zunächst erwarten könnte hauptsächlich durch die Sammlung von Ladungen

zu Stande, sondern viel mehr durch Induktionseffekte der sich zu den Elektroden bewegenden Ionen und Elektronen. Das elektrische Feld in einem zylindrischen Proportionalitätszähler kann durch

$$E(r) = \frac{CV_0}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.20)$$

beschrieben werden, wobei r der Abstand vom Anodendraht, ϵ die Dielektrische Feldkonstante des Gases, V_0 die angelegte Spannung und C die Kapazität pro Einheitslänge der Anordnung ist.

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \quad (4.21)$$

mit dem Radius a des Anodendrahtes und dem Radius b des Zylinders. Somit existiert im inneren des Rohres das folgende Potential:

$$\varphi(r) = -\frac{C \cdot V_0}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (4.22)$$

Eine Ladung q im Abstand r zum zentralen Draht besitzt somit eine potentielle Energie von

$$W = q \cdot \varphi(r) \quad (4.23)$$

Durch eine Bewegung der Ladung um die Strecke dr wird demnach eine Energieänderung um

$$dW = q \frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} dr \quad (4.24)$$

verursacht. Für einen zylindrischen Kondensator kann nun die Energie, welche im elektrischen Feld gespeichert ist durch $W = 1/2 \cdot l \cdot C \cdot V_0^2$ beschrieben werden. Nimmt man an, dass sich die Ladung schnell im Vergleich zur Reaktionszeit einer externen Spannungsquelle bewegt, so kann das System als geschlossen angesehen werden. Über die Energieerhaltung ergibt sich somit die Spannungsänderung welche durch die Bewegung der Ladung induziert wird zu:

$$dV = \frac{q}{l \cdot C \cdot V_0} \frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} dr \quad (4.25)$$

Diese Gleichung gilt zunächst allgemein. Für ein Zylindrisches Zählrohr, kann angenommen werden, dass die Multiplikation in einem Abstand r' von der Anode auftritt. Für die gesamte durch die Elektronen induzierte Spannung folgt hiermit durch Integration von $a + r'$ bis a :

$$V^- = -\frac{q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{a + r'}{a}\right) \quad (4.26)$$

während für die positiven Ionen durch Integration von $a + r'$ bis b folgt:

$$V^+ = -\frac{q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{b}{a + r'}\right) \quad (4.27)$$

Da sich der Multiplikationsbereich auf ein paar Anodenradien beschränkt, kann leicht eingesehen werden, dass der Anteil der Elektronen klein im Vergleich zum Anteil der positiven Ionen ist. Das induzierte Signal wird daher hauptsächlich durch die Bewegung der positiven Ionen verursacht, während die Bewegung der Elektronen in erster Näherung vernachlässigt

4.4 Arbeitsbereiche des Zählrohres

werden kann. Mit dieser Vereinfachung ergibt sich die zeitliche Entwicklung des Potentials zu:

$$V(t) = \int_{r(0)}^{r(t)} \frac{dV}{dr} dr = -\frac{q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \ln\left(\frac{r(t)}{a}\right) \quad (4.28)$$

Hiermit kann schließlich über die Beziehung

$$\frac{dr}{dt} = \mu E(r) \quad (4.29)$$

und die vereinfachende Näherung $r(0) = a$, da die Ionen in der Nähe der Anoden gebildet werden, durch Integration die Trajektorie der Ionen ermittelt werden:

$$r(t) = \left(a^2 + \frac{\mu CV_0}{\pi \epsilon}\right)^{1/2} \quad (4.30)$$

Einssetzen in Gleichung 4.28 liefert schließlich:

$$V(t) = -\frac{q}{4\pi \epsilon l} \ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right) \quad (4.31)$$

mit $t_0 = a^2 \pi \epsilon / \mu C V_0$.

Der so erhaltene Impuls wird in der Realität für gewöhnlich durch ein RC-Differenzierglied mit der Zeitkonstante τ nach kurzer Zeit abgeschnitten, wodurch nur der schnelle Anstiegsteil genutzt wird. Somit ergibt sich die in Abbildung 4.5 für verschiedene Zeitkonstanten dargestellte Signalform.

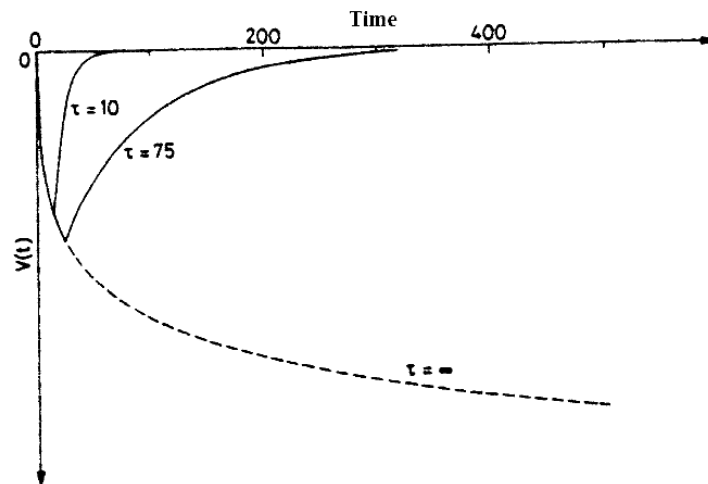


Abbildung 4.5: Signalform eines Zählrohres für verschiedene zeitkonstanten τ des RC-Gliedes

Für die gesamte Driftzeit gilt:

$$T = \frac{t_0}{a^2} (b^2 - a^2) \quad (4.32)$$

4.4.3 Tot- und Erholzeit des Geigerzählers

Nach einer Entladung im Geigerzähler erreichen die Elektronen rasch die Anode. Dort verbleiben sie und laden die aus Anodendraht und Zylinder bestehende Kapazität C_1 auf, so dass die Anodenspannung kleiner als der angelegte Wert ist. Die Ionen haben durch ihre deutlich höhere Masse eine geringere Mobilität und driften deutlich langsamer zur auf der Zylinderoberfläche liegenden Kathode als die Elektronen zum Anodendraht. Dadurch bildet sich um die Anode eine Raumladungszone, die das elektrische Feld dort weiter abschirmt. Dies hat zur Folge, dass nach einem Impuls für eine gewisse Zeit keine weiteren Impulse (unabhängig von ihrer Größe) registriert werden können, bis das elektrische Feld um die Anode wieder stark genug ist um eine neue Elektronenlawine zu erzeugen. Diese Zeit, in der keine weiteren Impulse registriert werden können, nennt man *Totzeit*. Sie liegt bei den meisten Geiger-Müller-Zählrohren im Bereich von 50 - 100 μs , hängt aber im genauen von den Eigenschaften des Geigerzählers, wie Füllgas und Geometrie ab. Die Totzeit kann über die Zeitkonstante des RC-Gliedes abgeschätzt werden. Da sich die Kapazität C_1 über den Widerstand R_2 entlädt, gilt für die Zeitkonstante und damit auch als Abschätzung für die Totzeit:

$$t_{tot} \propto \tau = R_2 \cdot C_1 \quad (4.33)$$

Wie anhand der Abschätzung deutlich zu erkennen ist, hängt die Totzeit hauptsächlich vom Arbeitswiderstand R_2 ab. Dieser muss also gerade so groß gewählt werden, dass während des Abwanderns der positiven Ionen zur Kathode, das Feld so klein ist, dass keine neue Lawine ausgelöst werden kann, aber gleichzeitig die Totzeit minimiert ist. Da sich das Feld, während die Raumladung in Richtung Kathode wandert, nur graduell aufbaut, können nach dem verstreichen der Totzeit zunächst nur kleine Impulse registriert werden, die mit der Zeit immer größer werden. Erst wenn die Kapazität C_1 wieder vollständig entladen ist, kann ein zweiter Impuls wieder die Intensität des ersten Impulses erreichen. Dieses Zeitintervall nennt man daher *Erholzeit*. Es versteht sich von selbst, dass die Messrate deutlich kleiner sein sollte als der Kehrwert der Erholzeit. Tot und Erholzeit können wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wird leicht mit einem Speicheroszilloskop bestimmt werden. Ist die Totzeit τ_T bekannt, so kann man wie in Gleichung 2.27 für eine Intervallverteilung mit Totzeit hergeleitet wurde, eine Formel für die um die Impulse während der Totzeit korrigierte Zählrate $Z_{\text{korr.}}$ angeben:

$$Z_{\text{korr.}} \hat{=} \frac{Z_{\text{mess.}}}{1 - \tau_T \cdot Z_{\text{mess.}}} \quad (4.34)$$

wobei $Z_{\text{mess.}}$ die im Experiment gemessene Zählrate angibt. ' .

Kapitel 5

Versuchsdurchführung

Nachdem in den letzten beiden Abschnitten die theoretischen Grundlagen behandelt wurden, soll in diesem Abschnitt nun auf die eigentliche Messung eingegangen werden.

5.1 Blockschaltbild der Datenaufnahmeelektronik

Abbildung 5.1 zeigt den Aufbau der verwendeten Ausleselektronik für das Zählrohr als Blockschaltbild.

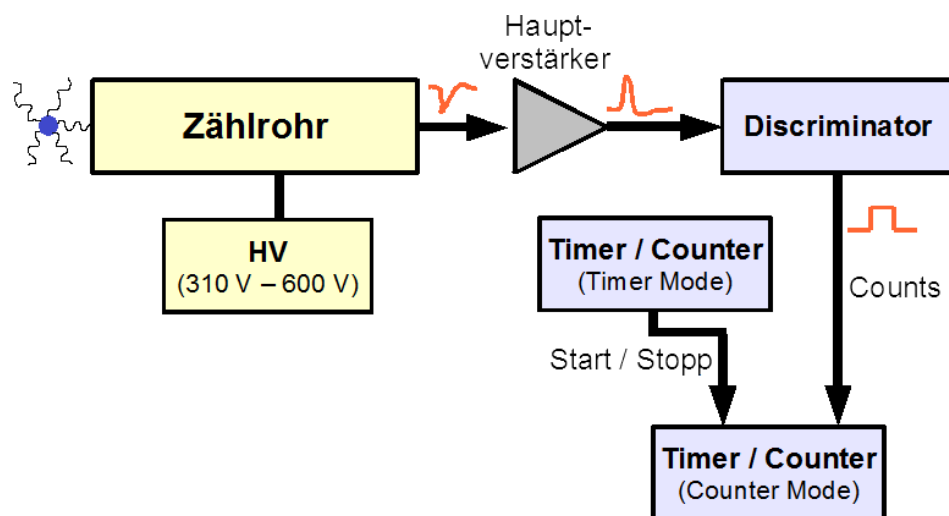


Abbildung 5.1: Blockschaltbild der Datenaufnahmeelektronik

Als radioaktive Quelle wurde in diesem Versuch ein ^{60}Co - Präparat (Gammastrahler) verwendet, welcher in einem gewissen Abstand über dem Zählrohr platziert wurde. Das Geiger-Müller-Zählrohr wird über ein regelbares Hochspannungsnetzteil (HV) mit seiner Arbeitsspannung (300 - 600 V) versorgt. Das Zählrohr selbst mit der im Theorieteil gezeigten internen Beschaltung liefert Ausgangssignale im Bereich von einigen hundert Millivolt. Um diese Signale weiter verarbeiten zu können, werden Sie zunächst durch einen Hauptverstärker verstärkt. Um den Zähler betreiben zu können, wird ein wohl definiertes logisches Signal benötigt. Um

5.2 Darstellung der beobachteten Signale

dies zu erhalten wird ein Single Channel Analyser (SCA) als Discriminator zwischengeschaltet. Dieser erzeugt ein Rechtecksignal mit genau definierter Länge und Amplitude ($+5V \hat{=} \text{TTL-Logik}$), sobald ein Eingangsimpuls oberhalb einer bestimmten einstellbaren Schwelle liegt. Diese Schwelle wurde so gewählt, dass das elektronische Rauschen vollständig unterdrückt ist und nur noch mit einem Primäreignis korrelierte Signale einen Impuls auslösen. Da alle Ausgangssignale des Geiger-Müller-Zählers in etwa die gleiche Höhe haben (Plateaubereich), sollte die Zählrate in diesem Versuch nicht signifikant von der gewählten Schwelle abhängen. Zur Registrierung der Impulse werden zwei Timer/Counter - Module verwendet. Hierbei wird eines der Module im Timer Modul betrieben und gibt dem anderen Modul, welches im Counter-Modus betrieben wird, die Zählzeit (kann zuvor eingestellt werden), also das Start- und Stoppsignal vor. Die zu zählenden Impulse gehen daher direkt vom Discriminator in das im Counter-Modus betriebene Modul. Bei der Messung mit konstanter Impulszahl werden die beiden Timer/Counter so verkabelt, dass der Counter das Start- und Stoppsignal an den Timer gibt. Abbildung 5.2 zeigt Fotos des in einem Metallgehäuse untergebrachten Geiger-Müller-Zählers und der verwendeten Ausleselektronik. Die Quelle wurde auf der Öffnung an der Oberseite des Gehäuses platziert.



Abbildung 5.2: Foto des Geiger-Müller-Zählers in einem Metallgehäuse (links) und der Ausleselektronik (rechts)

5.2 Darstellung der beobachteten Signale

Der Spannungsverlauf der Signale wurde mittels eines Speicheroszilloskops an mehreren Stellen der Schaltung beobachtet und dokumentiert. Abbildung 5.3 zeigt den Verlauf der Signale Vor und Nach dem Hauptverstärker. Der Detektor liefert zunächst einen negativen Spannungsimpuls mit einer Amplitude von etwa $(-110 \pm 10)mV$. Die Länge des negativen Impulsteils beträgt etwa $(150 \pm 50)\mu s$. Unter Hinzunahme der Überschwingung, ergibt sich eine Gesamtlänge von etwa $(500 \pm 100)\mu s$. Die Höhe der Überschwingung beträgt etwa $(-25 \pm 5)mV$ und ist somit deutlich kleiner als der negative Signalteil. Die Überschwingung wird hierbei allein durch die Elektronik verursacht und hat nichts mit der Signalform des Detektors (vgl. Ab-

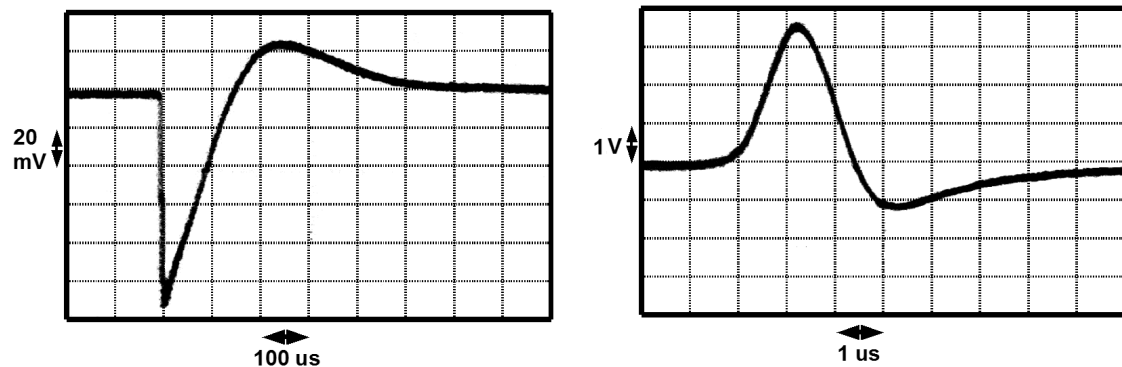


Abbildung 5.3: Darstellung der Signalform vor dem Hauptverstärker (links) [x: $100 \mu\text{s}/\text{DIV}$, y: $20 \text{ mV}/\text{DIV}$] und nach dem Hauptverstärker (rechts) [x: $1 \mu\text{s}/\text{DIV}$, y: $1 \text{ V}/\text{DIV}$]

schnitt 4.4.2) zu tun. Nach dem Hauptverstärker ist die Signalform invertiert, jedoch von der Form her nahezu unverändert. Die Höhe der positiven Amplitude beträgt nun $(3,5 \pm 0,5)\text{V}$, was einer Verstärkung um etwa einen Faktor ≈ 32 entspricht. Auch die Amplitude der Überschwingung wurde um etwa diesen Faktor auf $(1 \pm 0,5)\text{V}$ verstärkt. Der positive Anteil hat nun eine Länge von etwa $(2,5 \pm 0,5)\mu\text{s}$. Die Gesamtlänge beträgt nun etwa $(7 \pm 1)\mu\text{s}$. Durch den Hauptverstärker wird das Signal also zum Einen Höher und zum Anderen deutlich kürzer.

Als nächsten Schritt wird dieses Signal an den Discriminator übergeben. Abbildung 5.4 zeigt zum Einen wie der Discriminator zeitlich auf eine Eingangssignal reagiert (links) und zum Anderen eine Detailansicht des Ausgangssignals des Discriminators. Der Discriminator liefert

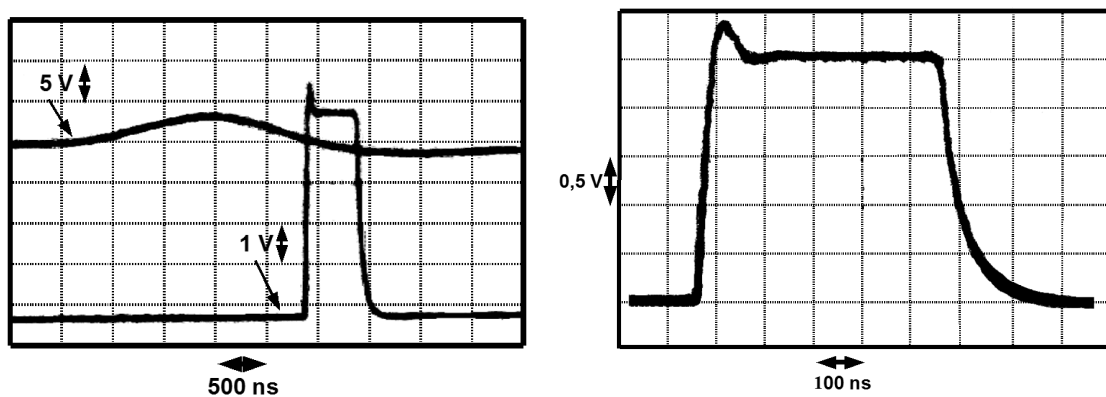


Abbildung 5.4: Darstellung des Signals nach dem Diskriminator relativ zum Eingangssignal des Discriminators (Signal nach dem Hauptverstärker) (links) [x: $500 \text{ ns}/\text{DIV}$, y: $1 \text{ V}/\text{DIV}$ für das Rechtecksignal, $5 \text{ V}/\text{DIV}$ für das Eingangssignal] und Ausgangssignal des Discriminators in Detailansicht (rechts) [x: $100 \text{ ns}/\text{DIV}$, y: $1 \text{ V}/\text{DIV}$]

als Ausgangsimpuls ein Rechtecksignal im positiven Bereich mit einer wohl definierten Amplitude von 5 V , sodass es digital in TTL - Logik weiter verarbeitet werden kann. Die Länge beträgt $(500 \pm 100)\text{ns}$. Die in der linken Abbildung zu beobachtende kleine Spitze an der steigenden Flanke und das kurze Tail der fallenden Flanke sind durch die Elektronik bedingt

und beeinflussen die Funktion des Nachfolgenden Zählers nicht. In der linken Abbildung wird deutlich, dass das Ausgangssignal des Discriminators verglichen mit diesem Eingangssignal um etwa $2\mu\text{s}$ verzögert ist. Da in diesem Versuch keine Koinzidenzen betrachtet werden sollen, kann dies ignoriert werden. Um das elektronische Rauschen zu unterdrücken wurde eine untere Diskriminatorschwelle von $0,4\text{ V}$ gewählt. Für die obere Schwelle wurde der maximalwert von $10,0\text{ V}$ eingestellt.

5.3 Abschätzung von Tot- und Erholzeit

Experimentell: Zur Bestimmung der Tot- und Erholzeit betrachtet man das Detektor-signal vor dem Hauptverstärker auf einem Speicheroszilloskop. Hierbei stellt man das Oszilloskop so ein, dass die vorhergehenden Signalformen nicht gelöscht werden und sich die einzelnen Signale somit überlagern. Der Trigger ist dabei auf die steigende Flanke des ersten Impulses eingestellt, welche daher als Startzeit verwendet werden kann. Abbildung 5.5 zeigt die Überlagerung sehr vieler Signalformen auf dem Oszilloskopschirm.

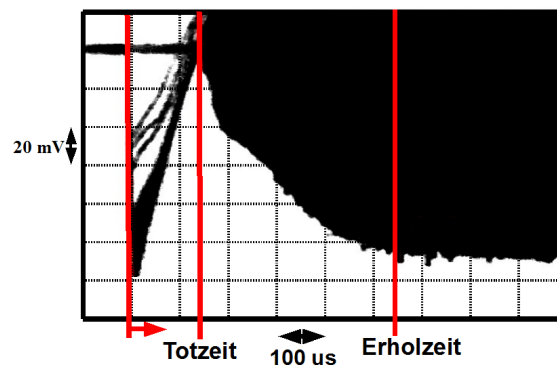


Abbildung 5.5: Überlagerte Darstellung vieler Signale vor dem Hauptverstärker. Totzeit und Erholzeit sind durch rote Linien eingezeichnet. Das Zeitintervall geht jeweils bis zur vorhergehenden roten Linie [x: $100\ \mu\text{s}/\text{DIV}$, y: $20\ \text{mV}/\text{DIV}$]

Der erste scharfe Peak ist hierbei durch das primäre Ereignis gegeben, auf welches getriggert wird. Wie zu erkennen ist, haben die meisten Signale in etwa die gleiche Höhe ($\pm 20\text{mV}$). Nach der Detektion dieses Signals können zunächst keine weiteren Signale detektiert werden, der Detektor befindet sich in der Totzeit. Erst nach dieser Zeit kann das nächste Signal detektiert werden. Der schwarze Bereich nach dem Ende der Totzeit stellt hierbei die Überlagerung der auf das erste Signal folgenden Signale dar. Da die Zeit nach der das nächste Signal im Detektor entsteht eine Zufallsgröße ist, ist diese für jeden Impuls unterschiedlich, so dass in der Überlagerung auf dem Oszilloskopschirm ein Kontinuum entsteht. Da sich nach der Totzeit zunächst die Erholzeit anschließt, können die Impulse zu Beginn des Kontinuums nicht mit der vollen Amplitude registriert werden, was durch den langsamen Anstieg des dunklen Bereichs repräsentiert wird. Erst nach der Erholzeit erreicht der schwarze Bereich die mittlere Amplitude der primären Signale, die Erholzeit ist somit beendet. Aus Abbildung 5.5 ergibt sich die Tot- und Erholzeit zu:

| | |
|------------|---------------------|
| Totzeit: | $(140 \pm 25)\mu s$ |
| Erholzeit: | $(400 \pm 50)\mu s$ |

Zwischen dem Beginn des primären Impulses und dem Ende der Erholzeit vergehen also $(540 \pm 56)\mu s$. Um gleich hohe Impulse zu erhalten sollte die Zählrate daher in jedem Fall kleiner als $1/(t_{tot} + t_{Erhol}) \approx 1850s^{-1}$ einstellen, dass die sekundären Impulse überhaupt registriert werden, also mit einer beliebigen Amplitude, so muss nur die Totzeit gemieden werden. In diesem Fall sollte die Zählrate auf Grund der statistischen Verteilung deutlich kleiner als $1/t_{tot} \approx 7100s^{-1}$ sein.

Rechnerisch: Rechnerisch kann die Totzeit über die Zeitkonstante des RC-Gliedes des Geiger-Müller Zählrohres abgeschätzt werden. Für diese gilt:

$$\tau_{RC} = R_2 \cdot C_1 = 6,8M\Omega \cdot 16pF = 109\mu s \quad (5.1)$$

Diese Zeit gibt den Abfall des Signals auf den $1/e$ -fachen Wert der Amplitude an. Berücksichtigt man, dass die experimentell abgelesene Totezeit bei einer Signalthöhe von 20 - 25 % der Amplitude beginnt ($t_{tot} \approx \ln(0,25)/\ln(e) \cdot \tau_{RC} \approx 1,4 \cdot \tau_{RC} \approx 153\mu s$), so stellt dieser Wert eine sehr gute Abschätzung für die Totzeit dar. Sowohl der Experimentell als auch der rechnerisch abgeschätzte Wert der Totzeit stimmen im Rahmen der Fehlergrenzen mit der Angabe aus dem Datenblatt des Zählrohres [VTG] überein, welche eine Totzeit von $120\mu s$ angibt. Für alle weiteren Berechnungen wird die gemessene Totzeit von $140\mu s$ verwendet.

5.4 Darstellung der Plateaukurve

Als Arbeitsspannung eines Geiger-Müller-Zählrohres wird in der Regel die Mitte des Plateaubereichs gewählt, damit die Auswirkungen von Schwankungen der Betriebsspannung minimiert werden. Um diesen Punkt zu bestimmen und um die Steigung der Plateaukurve zu ermitteln, wurde im ersten Schritt die Plateaukurve des Zählrohres aufgenommen. Hierzu wurde die Versorgungsspannung variiert und bei einer konstanten Messzeit die Anzahl der Impulse bestimmt. Die Messzeit wurde dabei so gewählt, dass der statistische Fehler eines jeden Messpunktes weniger als 1 % beträgt. Gemäß Abschnitt 2.3 gilt für den Fehler ΔN der Impulszahl N :

$$\Delta N = \sqrt{N} \quad (5.2)$$

Für den relativen Fehler folgt somit:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (5.3)$$

Mit der Bedingung, dass der relative Fehler kleiner als 1 % ($\hat{=}1/100$) sein soll folgt durch einsetzen:

5.4 Darstellung der Plateaukurve

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad N > 10.000$$

Die Messzeit muss also so gewählt werden, dass in dieser Zeit 10.000 Impulse registriert werden, was bei einer Messzeit von $t_{mess} = 240s$ erfüllt war. Die Zählrate ist also deutlich kleiner als das sich aus Tot und Erholzeit ergebende Limit (siehe Abschnitt 5.3).

Die Zählrate ergibt sich also gemäß:

$$Z_{mess} = \frac{N}{t_{mess}} \quad (5.4)$$

Da die Messzeit durch den Timer gegeben wird, kann ihr Fehler vernachlässigt werden. Für den Fehler der Zählrate gilt demnach:

$$\Delta Z_{mess} = \frac{\Delta N}{t_{mess}} = \frac{\sqrt{N}}{t_{mess}} \quad (5.5)$$

Die um die während der Totzeit τ_T verloren gegangenen Ereignisse korrigierte Zählrate ergibt sich gemäß Gleichung 4.34 zu:

$$Z_{korr.} \hat{=} \frac{Z_{mess.}}{1 - \tau_T \cdot Z_{mess.}} = \frac{N}{t_{mess} - \tau_T \cdot N} \quad (5.6)$$

Der Fehler der korrigierten Zählrate folgt mit gaußscher Fehlerfortpflanzung unter der Annahme, dass der Fehler von t_{mess} vernachlässigt werden kann:

$$\Delta Z_{korr} = \sqrt{\left(\frac{\partial Z_{korr}}{\partial N} \Delta N\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_{korr}}{\partial \tau_T} \Delta \tau_T\right)^2} \quad (5.7)$$

Einsetzen und ableiten liefert schließlich:

$$\Delta Z_{korr} = \sqrt{\left(\left(\frac{Z_{korr}}{N}\right)^2 t_{mess} \sqrt{N}\right)^2 + \left(Z_{korr}^2 \Delta \tau_T\right)^2} = Z_{korr}^2 \cdot \sqrt{\frac{T^2}{N^3} + (\Delta \tau_T)^2} \quad (5.8)$$

In Tabelle 5.1 sind die gemessenen und die errechneten korrigierten Zählraten bei den verschiedenen Spannungen dargestellt.

Wie auf Grund der Diskussion in Abschnitt 5.3 zu erwarten war, bewirkt die Korrektur der Totzeit nur geringe Veränderungen der Zählrate, da die gemessene Zählrate deutlich unter den ermittelten Grenzwerten liegt. In Abbildung 5.6 ist die Plateaukurve mit den korrigierten Zählraten einmal mit Nullpunkt (links) und einmal mit unterdrücktem Nullpunkt (rechts) dargestellt.

In Abbildung 5.6 (links) ist der zunächst steil ansteigende und dann in das Plateau übergehende Verlauf der Zählrohrkennlinie trotz der fehlenden Messpunkte im Bereich des Anstiegs deutlich zu erkennen. Die Tatsache, dass die Zählrate ab einem gewissen Wert rapide auf 0 zurückgeht kommt daher, dass die Signalhöhe unterhalb der Discriminatorschwelle liegt, so dass die Signale den Discriminator nicht mehr passieren können. Durch ein heruntersetzen

| U [V] | N | Z [s^{-1}] | $\Delta Z [s^{-1}]$ | $Z_{korr} [s^{-1}]$ | $\Delta Z_{korr} [s^{-1}]$ |
|-------|-------|----------------|---------------------|---------------------|----------------------------|
| 290 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 300 | 0 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| 310 | 10156 | 42,32 | 0,42 | 42,57 | 0,43 |
| 319 | 10592 | 44,13 | 0,43 | 44,41 | 0,44 |
| 330 | 10594 | 44,14 | 0,43 | 44,42 | 0,44 |
| 340 | 10604 | 44,18 | 0,43 | 44,46 | 0,44 |
| 350 | 10690 | 44,54 | 0,43 | 44,82 | 0,44 |
| 360 | 10524 | 43,85 | 0,43 | 44,12 | 0,44 |
| 381 | 10603 | 44,18 | 0,43 | 44,45 | 0,44 |
| 400 | 10777 | 44,90 | 0,43 | 45,19 | 0,44 |
| 421 | 10923 | 45,51 | 0,44 | 45,80 | 0,44 |
| 440 | 10863 | 45,26 | 0,43 | 45,55 | 0,44 |
| 461 | 10997 | 45,82 | 0,44 | 46,12 | 0,45 |
| 479 | 10835 | 45,15 | 0,43 | 45,43 | 0,44 |
| 500 | 11008 | 45,20 | 0,44 | 46,16 | 0,45 |
| 520 | 10847 | 45,20 | 0,43 | 45,48 | 0,44 |
| 540 | 11037 | 45,99 | 0,44 | 46,29 | 0,45 |
| 560 | 11093 | 46,22 | 0,44 | 46,52 | 0,45 |
| 580 | 11311 | 47,13 | 0,44 | 47,44 | 0,45 |
| 600 | 11170 | 46,54 | 0,44 | 46,85 | 0,45 |

Tabelle 5.1: Gemessene und korrigierte Zählraten der Plateaukurve

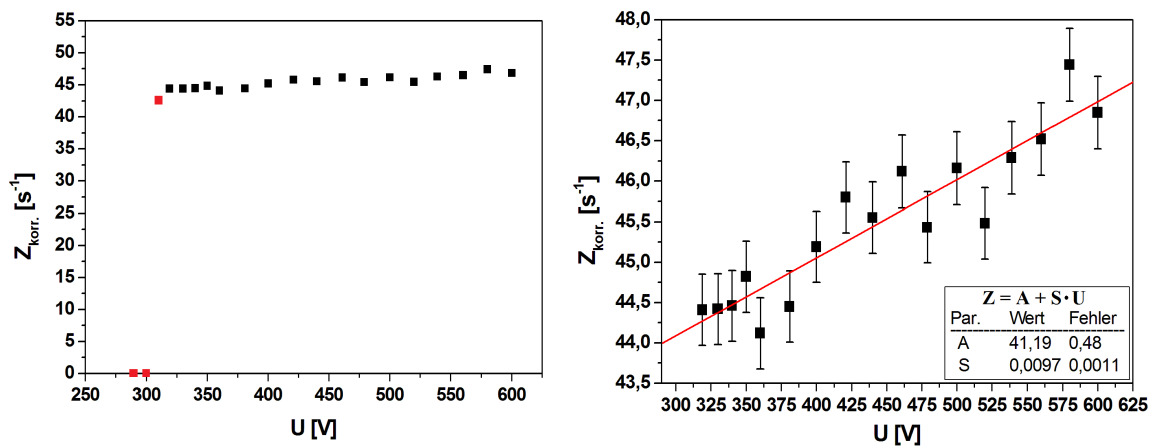


Abbildung 5.6: Korrigierte Zählrate in Abhängigkeit der Spannung mit Nullpunkt (links) und mit unterdrücktem Nullpunkt (rechts). Die in der linken Abbildung rot markierten Punkte gehören nicht mehr zum Plateau und wurden daher in der rechten Abbildung ignoriert. Die rote Linie in der rechten Abbildung stellt einen gewichteten linearen Fit durch die Messpunkte des Plateaus dar.

der Discriminatorschwelle wäre es möglich hier einen Abfall zu beobachten. Da das Ziel der Messung jedoch in der Aufnahme der Plateaukurve liegt, kann aus der Tatsache, dass die Zähl-

rate auf Null zurückgeht gefolgert werden, dass das Plateau hier endet, so dass dieser Bereich nicht mehr von Interesse ist. Die Abbildung zeigt, dass das Plateau etwa bei einer Spannung von etwa 320 V beginnt und bei einer Spannung größer als 600 V endet. Als Spannung zum Messen aller weiteren Versuchsreihen wurde die Mitte des Plateaus bei 450 V gewählt.

Der gewichtete Fit der Plateaukurve ergibt den folgenden linearen Zusammenhang im Bereich der Plateaukurve zwischen 320 V und 600 V:

$$Z_{korr} = A + S \cdot U = (41,19 \pm 0,48)s^{-1} + (9,7 \pm 1,1) \cdot 10^{-3} \frac{1}{s \cdot V} \cdot U \quad (5.9)$$

Aus der gefitteten Geraden ergibt sich für die Arbeitsspannung von 450 V eine korrigierte Zählrate von $(45,6 \pm 0,7)s^{-1}$.

Die Plateausteigung relativ zu dieser Rate bei 450 V ergibt sich somit zu:

$$S_{rel} = \frac{S}{Z_{korr}(450V)} = \frac{9,7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s \cdot V} \cdot 100V}{45,6s^{-1}} \cdot 100\% = 2,1\% \text{ pro } 100 \text{ V} \quad (5.10)$$

Für den Fehler der relativen Steigung gilt:

$$\Delta S_{rel} = \sqrt{\left(\frac{\Delta S \cdot 100\%}{Z_{korr}(450V)}\right)^2 + \left(\frac{S \cdot 100\% \cdot \Delta Z_{korr}(450V^2)}{Z_{korr}(450V)}\right)^2} \cdot 100\% = 0,2\% \text{ pro } 100 \text{ V} \quad (5.11)$$

Somit ergibt sich für die Arbeitsspannung von 450 V eine relative Steigung der Plateaukurve von $(2,1 \pm 0,2)\%$ pro 100 V. Dies ist mit der Aussage des Datenblattes des Zählrohres [VTG] konsistent, welches besagt, dass die Plateausteigung stets unter 8 % liegt.

5.5 Zählraten bei verschiedenen Messzeiten

Für diese Messreihe wurde eine Messrate von etwa 1400 Impulsen pro Minute gewählt. Die Einstellung der Zählrate erfolgte durch das platzieren von verschieden dicken Absorbern zwischen der radioaktiven Quelle und dem Zählrohr. Die im Vergleich zu den in der Anleitung angegebenen 1000 Impulsen pro Sekunde leicht erhöhte Zählrate fällt hierbei nicht ins Gewicht, da der kleine Fehler durch die höheren Verluste während der Totzeit in der Korrektur herausgerechnet wird. Tabelle 5.2 zeigt die für verschiedene Messzeiten zwischen 1 s und 10 Minuten gemessenen Zählraten. Die korrigierte Zählrate und deren Fehler berechnen sich auch hier aus den Gleichungen 5.4 bis 5.8.

Abbildung 5.7 zeigt die um die Totzeitverluste korrigierte Zählrate als Funktion der Messzeit.

Der Mittelwert aller Messungen und die Standardabweichung des Mittelwertes ergeben sich aus Tabelle 5.2 mit den im ersten Theorieteil beschriebenen statistischen Methoden zu:

$$\overline{Z_{korr}} \pm \sigma(Z_{korr}) = (22,67 \pm 0,17)s^{-1}$$

| t_{mess} [s] | N | Z [s^{-1}] | Z_{korr} [s^{-1}] | ΔZ_{korr} [s^{-1}] |
|----------------|-------|----------------|-------------------------|--------------------------------|
| 1 | 24 | 24 | 24,08 | 4,93 |
| 2 | 47 | 23,5 | 23,58 | 3,45 |
| 4 | 86 | 21,5 | 21,56 | 2,33 |
| 5 | 100 | 20 | 21,06 | 2,06 |
| 10 | 209 | 20,9 | 20,96 | 1,45 |
| 15 | 328 | 21,87 | 21,93 | 1,21 |
| 20 | 446 | 22,3 | 22,37 | 1,06 |
| 25 | 573 | 22,92 | 22,99 | 0,96 |
| 30 | 654 | 21,8 | 21,87 | 0,86 |
| 35 | 777 | 22,2 | 22,56 | 0,81 |
| 40 | 907 | 22,68 | 22,75 | 0,76 |
| 45 | 1040 | 23,11 | 23,19 | 0,72 |
| 50 | 1189 | 23,78 | 23,86 | 0,69 |
| 55 | 1232 | 22,40 | 22,47 | 0,64 |
| 60 | 1383 | 23,05 | 23,12 | 0,62 |
| 120 | 2762 | 23,02 | 23,09 | 0,44 |
| 180 | 4088 | 22,71 | 22,78 | 0,36 |
| 300 | 6788 | 22,63 | 22,70 | 0,28 |
| 420 | 9512 | 22,65 | 22,72 | 0,23 |
| 600 | 12617 | 22,7 | 22,77 | 0,2 |

Tabelle 5.2: Zählraten bei verschiedenen Messzeiten zwischen 1s und 10 Minuten

Einen ähnlichen Wert würde man auch als Ergebnis eines gewichteten Fits eines Polynom nullter Ordnung durch die Messpunkte erhalten. Die Standardabweichung der Einzelmessungen ergibt sich zu:

$$\sigma(Z_{korr}) = 0,75s^{-1}$$

Die Standardabweichung der Einzelmessungen und des Mittelwertes hängen hierbei gemäß Gleichung 2.13 zusammen. Für den wahrscheinliche Fehler der Einzelmessungen folgt:

$$r(Z_{korr}) = 0,6745 \cdot \sigma(Z_{korr}) = 0,51s^{-1}$$

Die untere und obere Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers der Einzelmessungen liegen also bei $22,17s^{-1}$ und $23,18s^{-1}$. Definitionsgemäß sollten bei einer Normalverteilten Zufallsgröße 50 % der Messwerte innerhalb der Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers der Einzelmessungen liegen. Dies ist im Rahmen der Fehlergrenzen der Messpunkte der Fall, da wie in Abbildung 5.7 bzw. aus Tabelle 5.2 leicht ersichtlich ist 9 von 20 Messpunkten (45 %) außerhalb der blau gestrichelten Linien liegen, was mit der statistischen Erwartung gut übereinstimmt. Außerhalb der einfachen Standardabweichung liegen nur noch 7 der 20 Messwerte (35 %), was den erwarteten 33 % für eine Normalverteilte sehr gut entspricht. Weiterhin wird deutlich, dass fast alle Messpunkte nicht mehr als eine Standardabweichung der individuellen Messung vom Mittelwert entfernt sind. Abbildung 5.7 verdeutlicht insbesondere die Tatsache, dass der Fehler der Einzelmessung und damit der Abstand des individuellen Wertes vom Mittelwert, welcher eine Näherung für den Erwartungswert darstellt, umso kleiner wird je größer der Umfang der Messreihe ist. Es zeigt sich, dass man ab etwa 10 - 30 Sekunden Messzeit ein

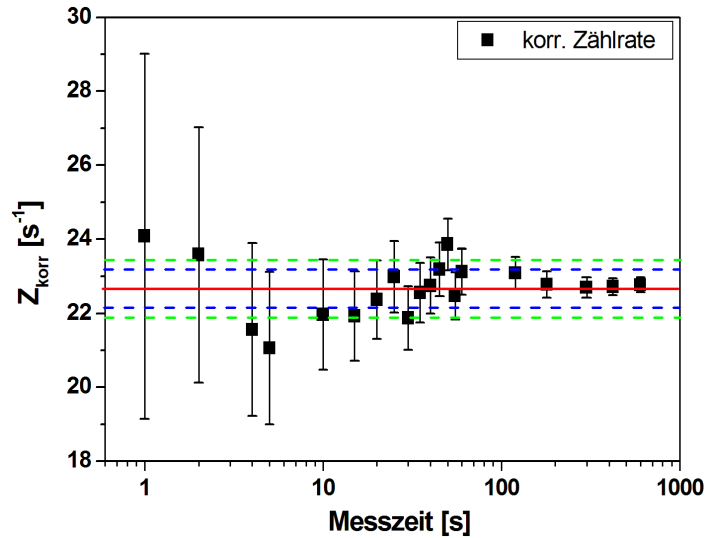


Abbildung 5.7: Um die Totzeitverluste korrigierte Zählrate für verschiedene Messzeiten zwischen 1 s und 10 min. Die Fehlerbalken der Einzelmessungen repräsentieren jeweils die einfache Standardabweichung des individuellen Messwertes. Die horizontale rote Linie stellt den Mittelwert dar, während die gestrichelten blauen Linien die obere und untere Grenze des wahrscheinlichen Fehlers der Einzelmessungen angeben. Zum Vergleich ist die einfache Standardabweichung der Einzelmessungen vom Mittelwert durch die gestrichelten grünen Linien dargestellt.

brauchbares Ergebnis für die Zählrate erhält, während bei weniger als 10 Sekunden Messzeit noch zu große Schwankungen Auftreten um den Mittelwert genau Abschätzen zu können. Um exakte Ergebnisse zu erhalten sollte jedoch bei der vorhandenen Zählrate mindestens für 180 Sekunden gemessen werden, da die Messwerte erst ab dieser Zeit den Mittelwert im Rahmen eines kleinen Fehlers zuverlässig reproduzieren.

5.6 Messzeit zum Erreichen einer konstanten Impulszahl

In diesem Versuchsteil soll die Messzeit ermittelt werden, welche benötigt wird um eine zuvor festgelegte Impulszahl zu erreichen. Hierzu wurde in einer vorbereitenden Messung zunächst die Impulszahl ermittelt, welche sich bei dieser Messung für eine Messzeit von 30 s ergibt. Es wurden $N_0 = 654$ Impulse registriert. Die beiden Zähler wurden nun so eingestellt, dass die Zeit angezeigt wird, nach welcher $N_0 = 654$ Impulse registriert wurden (Preset Scaler). Aus den so erhaltenen Messzeiten kann nun die Zählrate bestimmt werden. Tabelle 5.3 gibt die Messzeiten, sowie die Zählraten und deren Fehler für die 30 Einzelmessungen an. Die korrigierte Zählrate und deren Fehler berechnen sich auch hier aus den Gleichungen 5.4 bis 5.8.

Den folgenden Berechnungen liegen wiederum die im ersten Theorieteil hergeleiteten und diskutierten Formeln zu Grunde. Der Mittelwert der korrigierten Zählrate aller Messungen ergibt sich damit aus Tabelle 5.3 zu:

$$\overline{Z_{korr}} = (22,66 \pm 0,17) s^{-1}$$

| Messung | t_{mess} [s] | Z_{korr} [s^{-1}] | ΔZ_{korr} [s^{-1}] |
|---------|----------------|-------------------------|--------------------------------|
| 1 | 29,2 | 22,5 | 0,4 |
| 2 | 31,8 | 20,6 | 0,4 |
| 3 | 28,4 | 23,1 | 0,5 |
| 4 | 28,4 | 23,1 | 0,5 |
| 5 | 28,8 | 22,8 | 0,5 |
| 6 | 29,4 | 22,3 | 0,4 |
| 7 | 29,4 | 22,3 | 0,4 |
| 8 | 26,8 | 24,5 | 0,5 |
| 9 | 31,2 | 21,0 | 0,4 |
| 10 | 28,6 | 22,9 | 0,5 |
| 11 | 27,0 | 24,3 | 0,5 |
| 12 | 29,0 | 22,6 | 0,4 |
| 13 | 27,8 | 23,6 | 0,5 |
| 14 | 29,8 | 22,0 | 0,4 |
| 15 | 30,4 | 21,6 | 0,4 |
| 16 | 29,8 | 22,0 | 0,4 |
| 17 | 28,4 | 23,1 | 0,5 |
| 18 | 30,6 | 21,4 | 0,4 |
| 19 | 30,0 | 21,9 | 0,4 |
| 20 | 29,8 | 22,0 | 0,4 |
| 21 | 28,6 | 22,9 | 0,5 |
| 22 | 28,4 | 23,1 | 0,5 |
| 23 | 29,0 | 22,6 | 0,4 |
| 24 | 28,6 | 22,9 | 0,5 |
| 25 | 27,4 | 24,0 | 0,5 |
| 26 | 27,4 | 24,0 | 0,5 |
| 27 | 29,8 | 22,0 | 0,4 |
| 28 | 28,8 | 22,8 | 0,5 |
| 29 | 28,2 | 23,3 | 0,5 |
| 30 | 29,2 | 22,5 | 0,4 |

Tabelle 5.3: Messzeiten für $N_0 = 654$ Impulse und daraus berechnete um die Verluste während der Totzeit korrigierte Zählraten Z_{korr} und deren Fehler (Standartabweichung)

Die Standartabweichung der Einzelmessungen ergibt sich zu:

$$\sigma(Z_{korr}) = 0,91s^{-1}$$

somit liegen die untere und obere Grenze der Standartabweichung bei $21,75s^{-1}$ bzw $23,56s^{-1}$. Für den wahrscheinlichen Fehler folgt:

$$r(Z_{korr}) = 0,6745 \cdot \sigma(Z_{korr}) = 0,61s^{-1}$$

was zu einer unteren und oberen Grenze von $22,05s^{-1}$ bzw. $23,27s^{-1}$ führt.

Abbildung 5.8 stellt die Zählraten und deren Fehlerbalken (einfache Standartabweichung) als Funktion der Nummer der Messung dar. Der Mittelwert ist als rote Linie eingezeichnet. Die

5.6 Messzeit zum Erreichen einer konstanten Impulszahl

Fehlergrenzen des wahrscheinlichen Fehlers und der Standardabweichung der Einzelmessungen sind als blau bzw. grün gestrichelte Linien dargestellt.

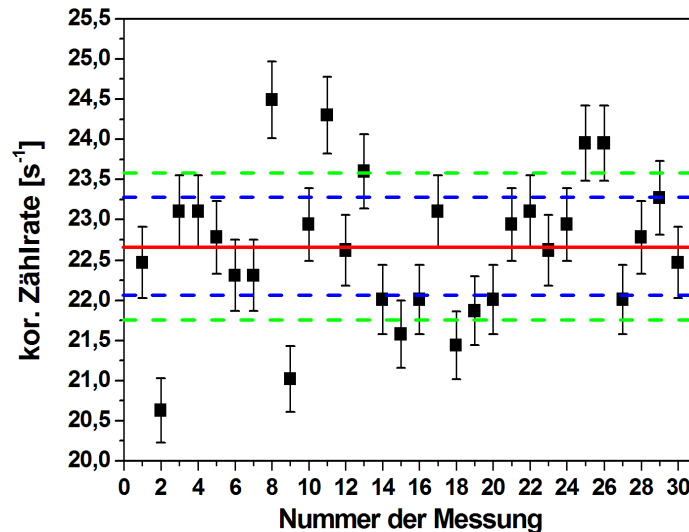


Abbildung 5.8: Zählrate bei konstanter Impulszahl. Die Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers der Einzelmessungen sind als blau gestrichelte Linien und die Grenzen der einfachen Standardabweichung der Einzelmessungen als grün gestrichelte Linien eingezeichnet.

Tabelle 5.3 und Abbildung 5.8 zeigen, dass 6 Messwerte oberhalb und 9 Messwerte unterhalb der Grenzen des Wahrscheinlichen Fehlers der Einzelmessungen liegen. Dies entspricht genau 50 % der 30 Messungen und gibt somit genau das Resultat wieder, welches man für eine normalverteilte Zufallsgröße erwartet. Außerhalb der Grenzen der einfachen Standardabweichung liegen 9 Messwerte was 30 % der Messungen entspricht und somit ebenfalls im Rahmen der für eine normalverteilte Zufallsgröße Erwarteten 33 % liegt. Bis auf einen Messwert liegen Alle Messwerte innerhalb der doppelten Standardabweichung (96,7 %), was den für eine normalverteilte Zufallsgröße zu erwartenden 95,5 % sehr gut entspricht. Die Tatsache, dass alle Erwartungen erfüllt sind zeigt, dass die statistische Analyse korrekt durchgeführt wurde. Die Tatsache, dass es sich um eine normalverteilte Zufallsgröße handelt, lässt sich leicht bestätigen, indem man die Messwerte in ein Histogramm auf der 2. Achse von Abbildung 5.8 projiziert. Abbildung 5.9 zeigt eine solche Projektion, in welcher man eine Normalverteilung erkennt.

Im Vergleich zur vorhergehenden Messreihe, in welcher bei stark variierenden Messzeiten gemessen wurde und der Fehler der individuellen Messungen somit stark von der Messzeit und damit der Impulszahl abhing, beobachtet man bei dieser Messung, dass der Fehler bei allen Messpunkten etwa gleich groß ist. Unabhängig davon ergeben sich jedoch für den Mittelwert und insbesondere für dessen Fehler in etwa die gleichen Werte. Dies ist darauf zurückzuführen, dass in dieser Messung die höhere Anzahl an Stichproben die im Vergleich zur mittleren Messzeit der vorherigen Messreihe geringere individuelle Messzeit ausgleicht.

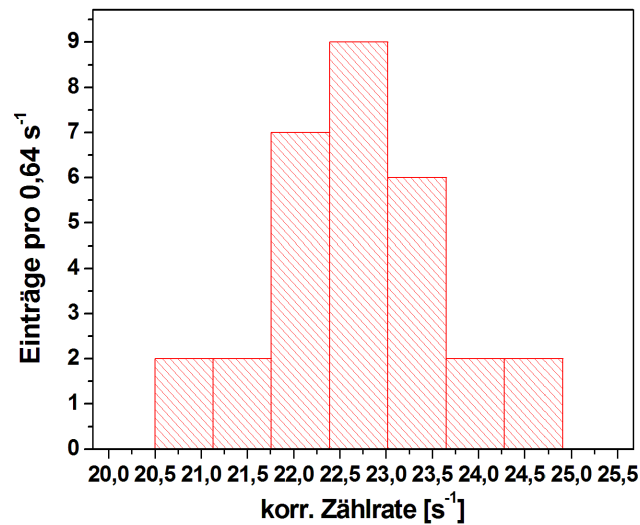


Abbildung 5.9: Histogramm mit den korrigierten Zählraten aus Tabelle 5.3

5.7 Impulszahlen bei konstanter Messzeit - χ^2 -Test

Durch zusätzliche Absorber zwischen der Gammaquelle und dem Geiger-Müller-Zählrohr wurde die Zählrate auf etwa 12 Impulse pro Sekunde eingestellt. In $N = 401$ Einzelmessungen wurde nun jeweils $t_{mess} = 1s$ lang die Zahl der Impulse gemessen. das Ergebnis ist in Tabelle 5.4 angegeben.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Impulse x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| Häufigkeit l_x | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 11 | 15 | 21 | 31 | 34 | 50 | 41 | 44 | 30 |
| Impulse x | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | |
| Häufigkeit l_x | 34 | 32 | 19 | 13 | 5 | 6 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | |

Tabelle 5.4: Ergebnis der der 401 Messungen mit einer Dauer von jeweils 1 s

Da genau 401 Messungen durchgeführt wurden, gilt:

$$N = \sum l_x = 401$$

Weiterhin gilt:

$$\sum x \cdot l_x = 4947$$

Der Mittelwert ergibt sich zu:

$$m = \frac{1}{\sum l_x} \cdot \sum (x \cdot l_x) = \frac{4974}{401} = 12,34$$

Die Wahrscheinlichkeit bei diesem Mittelwert genau x Impulse zu messen ergibt sich aus der Poissonverteilung (vgl. Gleichung 2.20) gemäß:

$$P_x = P_0 \cdot \frac{m^x}{x!} \quad (5.12)$$

mit

$$P_0 = e^{-m} = e^{-12,34} = 4,4 \cdot 10^{-4}\%$$

Die Normierung der Verteilung auf das Experiment erfolgt durch Multiplikation mit der Anzahl der Ereignisse da sich so aus der durch die auf 1 normierten Verteilung gegebene relative Häufigkeit, die absolute Häufigkeit ergibt. Hiermit können nun die gemäß der Poissonverteilung theoretisch zu erwartenden Messwerte L_x berechnet werden.

$$L_x = N \cdot e^{-m} \cdot \frac{m^x}{x!} = 401 \cdot e^{-12,34} \cdot \frac{12,34^x}{x!}$$

Abbildung 5.10 zeigt ein Balkendiagramm mit den gemessenen (rot) und den aus der Poissonverteilung errechneten (grün) Häufigkeiten der einzelnen Impulszahlen.

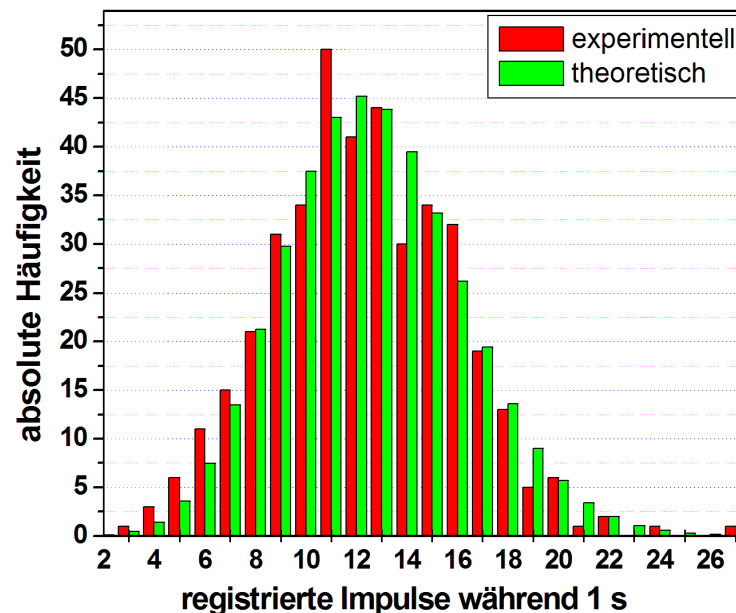


Abbildung 5.10: Gemessene Häufigkeiten der einzelnen Impulszahlen bei einer Messzeit von 1 s (rote Balken) und mittels der auf das Experiment normierten Poissonverteilung berechnete Häufigkeiten der individuellen Impulszahlen (grüne Linie)

Der Fehler der absoluten Häufigkeit der einzelnen Balken kann durch die Wurzel des Wertes abgeschätzt werden Dieser beträgt für das Maximum der Verteilung 6 -7 Einträge. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache können die teils recht großen Schwankungen zwischen Benachbarten Balken plausibel gemacht werden. Berücksichtigt man diesen Fehler, so lässt sich folgern, dass die theoretische und die experimentelle Verteilung gut übereinstimmen. Um ein qualitatives Maß für diese Übereinstimmung zu erhalten soll im nächsten Abschnitt ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

χ^2 -Test: Tabele 5.5 gibt die zur Durchführung des χ^2 -Tests erforderlichen Berechnungen an. Da gemäß Abschnitt 2.4 beim χ^2 -Test in jeder Kategorie mindestens 5 Ereignisse liegen sollten, wurden die Bereiche $x = 0-5$ und $x > 21$ jeweils zu einer Kategorie zusammengefasst.

Die in der vierten und fünften Spalte durchgeführten Berechnungen sind jeweils in der ersten Zeile angegeben.

| x | l_x | P_x [%] | $L_x = P_x \sum l_x$ | $(l_x - L_x)^2 / L_x$ |
|----------|-------|---------------|----------------------|-----------------------|
| 0 bis 5 | 10 | 1,4 | 5,53 | 3,66 |
| 6 | 11 | 1,86 | 7,5 | 1,66 |
| 7 | 15 | 3,36 | 13,5 | 0,17 |
| 8 | 21 | 5,29 | 21,2 | 0,00 |
| 9 | 31 | 7,42 | 29,7 | 0,05 |
| 10 | 34 | 9,35 | 37,5 | 0,33 |
| 11 | 50 | 10,72 | 43,0 | 1,14 |
| 12 | 41 | 11,27 | 45,2 | 0,39 |
| 13 | 44 | 10,93 | 43,8 | 0,00 |
| 14 | 30 | 9,84 | 39,5 | 2,27 |
| 15 | 34 | 8,28 | 33,2 | 0,02 |
| 16 | 32 | 6,25 | 26,2 | 1,31 |
| 17 | 19 | 4,84 | 19,4 | 0,01 |
| 18 | 13 | 3,39 | 13,6 | 0,03 |
| 19 | 5 | 2,25 | 9,0 | 1,79 |
| 20 | 6 | 1,42 | 5,7 | 0,02 |
| > 21 | 5 | 1,87 | 7,5 | 0,83 |
| Σ | 401 | ≈ 100 | ≈ 401 | 13,86 |

Tabelle 5.5: Berechnungen zur Durchführung des χ^2 -Tests. l_x ist hierbei die beobachtete Häufigkeit des Ereignisses x, P_x ist die aus der Poissonverteilung berechnete prozentuale Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses x und L_x die daraus errechnete Häufigkeit des Ereignisses x. Die letzte Zeile gibt jeweils die Summe der darüber liegenden Werte an. Die mittleren beiden Summen liefern auf Grund der Rundungen der Einzelergebnisse nur ungefähr den erwarteten Wert.

Die Summe der letzten Spalte stellt den gesuchten Wert von χ^2 dar.

$$\chi^2 = \sum (l_x - L_x)^2 / L_x = 13,86$$

Die Anzahl F der Freiheitsgrade ergibt sich aus der Anzahl der Klassen minus der Anzahl der Parameter der anzupassenden Funktion. Im vorliegenden Fall wurden 17 Klassen bei 2 Parametern der Poissonverteilung verwendet. Für die Zahl der Freiheitsgrade folgt also:

$$F = 17 - 2 = 15$$

Aus Abbildung 2.6 kann hiermit die Wahrscheinlichkeit P ermittelt werden, dass bei einer Wiederholung der Messreihe eine größere Abweichung von den erwarteten Werten beobachtet wird. Diese ergibt sich zu:

$$P \approx 0,5$$

Da P somit zwischen 0,1 und 0,9 liegt entspricht die beobachtete Verteilung mit sehr wahrscheinlich einer Poissonverteilung.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Diskussion

Der Versuch hat einerseits einige Grundlegende Charakteristiken eines Geiger-Müller-Zählrohres verdeutlicht, andererseits aber auch anhand der Messergebnisse des Geiger-Müller-Zählrohres in statistische Methoden zur Analyse kernphysikalischer Experimente eingeführt. Bei der Bestimmung der Totzeit und der Plateausteigung konnten die Angaben des Herstellers jeweils innerhalb der Fehlergrenzen bestätigt werden. Bei der Aufnahme der Plateaukurve ist es eventuell ratsam einen Gammastrahler mit höherer Aktivität zu verwenden, da hierdurch die Messzeit deutlich verkürzt werden kann man aber immer noch deutlich unter dem Bereich ist, in dem Totzeitverluste eine dominante Rolle spielen.

In zwei Messreihen mit variabler Messzeit und konstanter Impulszahl wurde der Einfluss der Messstatistik auf den bei der Messung zu erwartenden Fehler verdeutlicht. Hierbei hat sich gezeigt, dass die erwarteten Messwerte innerhalb bzw. außerhalb der Fehlergrenzen für den wahrscheinlichen Fehler und die Standardabweichung gut mit den aus der Theorie erwarteten Werten übereinstimmen. Weiterhin wurde gezeigt, dass sich ein χ^2 -Test sehr gut dazu eignet um zu entscheiden, ob eine Zufallsgröße einer gewissen Verteilung gehorcht, da durch den Test die auf den ersten Blick sehr gute Reproduktion der Messwerte durch die Poissonverteilung bestätigt werden konnte.

Insgesamt hat der Versuch einen guten Überblick über die genannten Bereiche gegeben und konnte ohne Probleme durchgeführt werden.

Literaturverzeichnis

- [RDE55] R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw Hill (1955)
- [Leo94] W. R. Leo, *Techniques for nuclear and particle physics experiments: a how-to approach* 2nd edition, Berlin Heidelberg, Springer Verlag (1994)
- [An09] S. Schippers, „Anleitung zum Praktikum Atom- und Quantenphysik“, Institut für Atom- und Molekülphysik, JLU Gießen (2009)
- [PDG10] Particle Data Group, *Particle Physics Booklet* (2010)
- [RDK89] R. D. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, John Wiley & Sons, 2nd edition (1989)
- [VTG] VacuTec, *Datenblatt: Geiger-Müller-Zählrohr Typ 70 003* (2003)